ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ **2022**
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (037)

-ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ-

Ὁ Τοῖς ἐγρηγορόσιν ἕνα καὶ κοινὸν κόσμον εἶναι,
τῶν δὲ κοιμωμένων ἕκαστον εἰς ἴδιον ἀποστρέφεσθαι.[1] ’

- *Ηράκλειτος*

Επιμέλεια: Γιάννης Ιωακείμ/Διορίσιμος εκπαιδευτικός
Αρχείο: https://ioakimioannis.com/pagypries/

[1] ’Γι’ αυτούς που είναι ξύπνιοι, ο κόσμος είναι ο ίδιος και κοινός,
ενώ γι’ αυτούς που κοιμούνται καθένας τους στρέφεται στο δικό του κόσμο.’

Κύριος σκοπός των πιο κάτω (προτεινόμενων) λύσεων για την εξέταση του μαθήματος ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (037) είναι να προσφέρει κατευθύνσεις στον υποψήφιο μαθητή του πως αναμένεται να απαντήσεις στις ερωτήσεις με τρόπο ώστε να αναδεικνύεται στο μέγιστο βαθμό στις επιδιώξεις του νέου αναλυτικού προγράμματος.

Ένας καλός τρόπος μελέτης είναι ο μαθητής να βάζει **βαθμό δυσκολίας** σε κάθε άσκηση που λύνει (από προηγούμενες εξετάσεις), π.χ. από 0 (εύκολη) μέχρι 5 (δύσκολο), έτσι ώστε να γνωρίζει πού συνάντησε δυσκολία και να χρειαστεί περισσότερη μελέτη.
Προς τούτο έχουν προστεθεί ενδεικτικοί βαθμοί δυσκολίας στις ερωτήσεις (0-εύκολη εως 5-δύσκολη) λαμβάνοντας υπόψιν διάφορους παράγοντες (λ.χ. χρόνος επίλυσης, χρήση γνώσεων από άλλες τάξεις, αν το θέμα συνδύαζε διάφορα αντικείμενα της Θεωρίας κτλ.) και τα σχήματα -όπου απαιτείται να γίνουν- έχουν γίνει όπως θα 'έπρεπε'/'αναμενόταν' ενας υποψήφιος να τα κάνει.

Επιπρόσθετα προστέθηκαν, όπου έχει κριθεί αναγκαίο, σχόλια στα θέματα και εναλλακτικοί τρόποι επίλυσης.

Ενδεικτικοί βαθμοί δυσκολίας:
Μέρος Α
Α1. 2.5/5, **Α2.** 2/5, **Α3.** 3.5/5, **Α4.** 2/5, **Α5.** 2.5/5, **Α6.** 3.5/5, **Α7.** 2.5/5,
Α8. 4/5, **Α9.** 3.5/5, **Α10.** 3/5

Μέρος Β
Β1. 3/5, **Β2.** 2.5/5, **Β3.** 2.75/5, **Β4.** 3.75/5, **Β5.** 3.25/5

Μέρος Α

Α1. Να βρείτε[α] τα ολοκληρώματα:

α) $\displaystyle\int \left(e^{2x} + 4x - \frac{x^2+2}{x^2+1}\right)\, dx$

β) $\displaystyle\int \left(\text{εφ}^5 x + \text{εφ}^7 x\right)\, dx, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$

[α] Εννοεί να **υπολογίσετε**.

Απάντηση

α)

$$\begin{aligned}
\int \left(e^{2x} + 4x - \frac{x^2+2}{x^2+1}\right) dx &= \int e^{2x}\,dx + \int 4x\,dx - \int \frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}e^{2x} + 2x^2 - \int \frac{(x^2+1)+1}{x^2+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}e^{2x} + 2x^2 - \int \frac{x^2+1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}e^{2x} + 2x^2 - x - \text{τοξεφ}x + c.
\end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned}
\int \left(\text{εφ}^5 x + \text{εφ}^7 x\right) dx &= \int \text{εφ}^5 x(1+\text{εφ}^2 x)\,dx \\
&= \int \text{εφ}^5 x \cdot \sec^2 x\,dx \\
&= \int \text{εφ}^5 x \cdot (\text{εφ}x)'\,dx \quad = \quad \int \text{εφ}^5 x\,d(\text{εφ}x) \\
&= \frac{\text{εφ}^6 x}{6} + c.
\end{aligned}$$

Α2. **α)** Να διατυπώσετε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού.

β) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln x$. Να αποδείξετε ότι για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα $[1, e]$ και να υπολογίσετε τιμή στο διάστημα $(1, e)$ η οποία ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος.

Απάντηση

α) Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού:
Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ $\ (a < \beta)$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλαδή στο διάστημα (a, β). Τότε, υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}.$$

β) Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, e]$ (γνωστό από τη Θεωρία) και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλαδή στο διάστημα $(1, e)$ (γνωστό από τη Θεωρία).
Πληρούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για την f στο διάστημα $[1, e]$, άρα, υπάρχει $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1} = \frac{\ln e - \ln 1}{e - 1} = \frac{1}{e - 1}.$$

Θα βρούμε τις τιμές του x στο διάστημα $(1, e)$ για τις οποίες $f'(x) = \frac{1}{e-1}$.
Είναι

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0$$

και άρα

$$f'(x) = \frac{1}{e - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{e - 1} \Leftrightarrow x = e - 1.$$

Άρα, υπάρχει μόνο ένα $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{1}{e-1}$, το $\boxed{\xi = e - 1}$.

Α3. Πενταμελής επιτροπή θα σχηματιστεί από μια ομάδα μαθητών η οποία αποτελείται από 5 κορίτσια και 7 αγόρια. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να σχηματιστεί η επιτροπή αν:
α) Η επιτροπή περιλαμβάνει 2 κορίτσια και 3 αγόρια.

β) Δυο συγκεκριμένα αγόρια της ομάδας, ο Α και ο Β, αρνούνται να τοποθετηθούν ταυτόχρονα στην επιτροπή.

Απάντηση

α) Επιλέγω 2 από τα 5 κορίτσια: υπάρχουν $\binom{5}{2} = \frac{5!}{3!2!} = 10$ τρόποι και επιλέγω 3 από τα 7 αγόρια: υπάρχουν $\binom{7}{3} = \frac{7!}{4!3!} = 35$ τρόποι. Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, υπάρχουν $10 \cdot 35 = 350$ τρόποι.

β) Εδώ, παρόλο που μπορεί να φανεί το ανίθετο, στην επιλογή των μαθητών δεν παίζει ρόλο το φύλο των μαθητών: έχουμε 12 μαθητές στο σύνολο.

Περίπτωση 1: Ο Α δεν είναι στην επιτροπή:
Αφού έχει επιλεγεί ο ένας (από τους 5), επιλέγω ακόμη 4 μαθητές/τριες από το σύνολο των (υπόλοιπων) 10: υπάρχουν $\binom{10}{4} = \frac{10!}{6!4!} = 210$ τρόποι.
Περίπτωση 2: Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, υπάρχουν $\binom{10}{4} = \frac{10!}{6!4!} = 210$ τρόποι.
Περίπτωση 3: Να μην είναι στην επιτροπή ούτε ο Α ούτε ο Β: επιλέγω 5 μαθητές/τριες από το σύνολο των (υπόλοιπων) 10: $\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = 252$ τρόποι.

Άρα, από την αρχή του αθροίσματος, υπάρχουν $210 + 210 + 252 = 672$ τρόποι.

Α4. Να υπολογίσετε την τιμή του $\nu \in \mathbb{N}$ για την οποία ισχύει

$$\sum_{k=1}^{\nu} (2k^2 - 4k) = \nu(\nu + 1).$$

Απάντηση

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\nu}(2k^2-4k)=\nu(\nu+1) \quad &\Leftrightarrow \quad 2\sum_{k=1}^{\nu}k^2-4\sum_{k=1}^{\nu}k=\nu(\nu+1)\\
&\Leftrightarrow \quad 2\cdot\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}-4\cdot\frac{\nu(\nu+1)}{2}=\nu(\nu+1)\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{3}-2\cdot\nu(\nu+1)=\nu(\nu+1)\\
&\Leftrightarrow \quad \nu(\nu+1)\cdot\left(\frac{2\nu+1}{3}-2\right)=\nu(\nu+1)\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2\nu+1}{3}-2=1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\nu+1}{3}=3\\
&\Leftrightarrow \quad 2\nu+1=9 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\nu=4}.
\end{aligned}$$

Α5. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2=4ax,\ a>0$ και εστία E. Έστω $T(at^2,2at),\ t\neq 0$ τυχαίο σημείο της. Αν A η προβολή του σημείου T στη διευθετούσα της παραβολής και M το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AE, να αποδείξετε ότι η TM τέμνει κάθετα την AE.

Απάντηση

$E(-a,0)$.
Η διευθετούσα της παραβολής έχει εξίσωση $x=-a$ και άρα η προβολή A του σημείου T στη διευθετούσα έχει συντεταγμένες $A(-a,y_T)\equiv A(-a,2at)$.
Τότε

$$x_M=\frac{x_A+x_E}{2}=\frac{-a+a}{2}=0,\quad y_M=\frac{y_A+y_E}{2}=\frac{2at+0}{2}=at.$$

Συνεπώς,

$$\lambda_{AE}=\frac{y_E-y_A}{x_E-x_A}=\frac{0-2at}{a-(-a)}=\frac{-2at}{2a}=-t$$

και

$$\lambda_{TM}=\frac{y_M-y_T}{x_M-x_T}=\frac{at-2at}{0-at^2}=\frac{-at}{-at^2}=\frac{1}{t}.$$

Έτσι,

$$\lambda_{AE}\cdot\lambda_{TM}=(-t)\cdot\left(\frac{1}{t}\right)=-1\Rightarrow AE\perp TM.$$

Α6. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x - 2\text{τοξεφ}x,$$

όπου[α'] $\text{τοξεφ}x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (-\infty, 1)$ ισχύει

$$2x - 4\text{τοξεφ}x \leq \pi - 2.$$

[α'] **Σημείωση:** Γνωρίζουμε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \arctan x$ είναι το $\mathbb{R}$ και το σύνολο τιμών της το διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Συνεπώς, η συνάρτηση f όπως δόθηκε είναι καλά ορισμένη και δεν χρειάζεται να 'υποθέσουμε' (γιατί αυτό συνάγεται από τη διατύπωση) ότι το σύνολο τιμών της $g(x) = \arctan x$ είναι το διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Απάντηση

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x - 2\text{τοξεφ}x)' = 1 - 2 \cdot \frac{1}{1+x^2} = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2}{1+x^2} \\ &= \frac{x^2-1}{1+x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Δεν υπάρχουν άλλα κρίσιμα σημεία.
Είναι

$$\begin{aligned} f(-1) &= -1 - 2\text{τοξεφ}(-1) = -1 - 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1, \\ f(1) &= 1 - 2\text{τοξεφ}1 = 1 - 2 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Κάνουμε τον πίνακα μεταβολών του προσήμου της f' :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

από τον οποίο συνάγουμε:
$\forall x \in (-\infty, -1) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα,
$\forall x \in (-1, 1) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα,
$\forall x \in (1, +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα.
Αφού $f'(-1) = 0, \ \ f'(1) = 0$ και από το πιο πάνω, έπεται ότι στο σημείο $(-1, f(-1)) = \left(-1, \frac{\pi}{2} - 1\right)$ η γρ. παράσταση της f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** και αφού $f'(1) = 0$ και από το πιο πάνω, έπεται ότι στο σημείο $(1, f(1)) = \left(1, 1 - \frac{\pi}{2}\right)$ η γρ. παράσταση της f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο**.
Δεν υπάρχουν ολικά ακρότατες τιμές, αφού

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

β) Στο διάστημα $(-\infty, 1)$, όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε από τον πίνακα προσήμου της f' πιο πάνω, η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο σημείο $(-1, f(-1)) = \left(-1, \frac{\pi}{2} - 1\right)$ και άρα

$$\forall x \in (-\infty, 1) \Rightarrow f(x) \leq f(-1) = \frac{\pi}{2} - 1,$$

δηλαδή

$$\forall x \in (-\infty, 1) \Rightarrow x - 2\text{τοξεφ}x \leq \frac{\pi - 2}{2},$$

δηλαδή

$$\forall x \in (-\infty, 1) \Rightarrow 2x - 4\text{τοξεφ}x \leq \pi - 2$$

με την ισότητα μόνο για $x = -1$.

A7. Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f και g με

$$f(x) = -x^2 + 4 \quad \text{και} \quad g(x) = 2x + 4.$$

α) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου T, το οποίο περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου T γύρω από των άξονα των τετμημένων.

Απάντηση

Το γράφημα της συνάρτησης f είναι παραβολή με κορυφή το σημείο $K(0, 4)$. Βρίσκουμε τα σημεία τομής του γραφήματος της με τον άξονα των τετμημένων:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (2 - x)(2 + x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Το γράφημα της συνάρτησης g είναι μια ευθεία. Βρίσκουμε τα σημεία τομής της με τους άξονες των συντεταγμένων:

$$g(0) = 4, \quad g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Βρίσκουμε τη σχετική θέση των γραφημάτων των f **και** g :

$$f(x) - g(x) = 4 - x^2 - 2x - 4 = -x^2 - 2x = -x(x + 2).$$

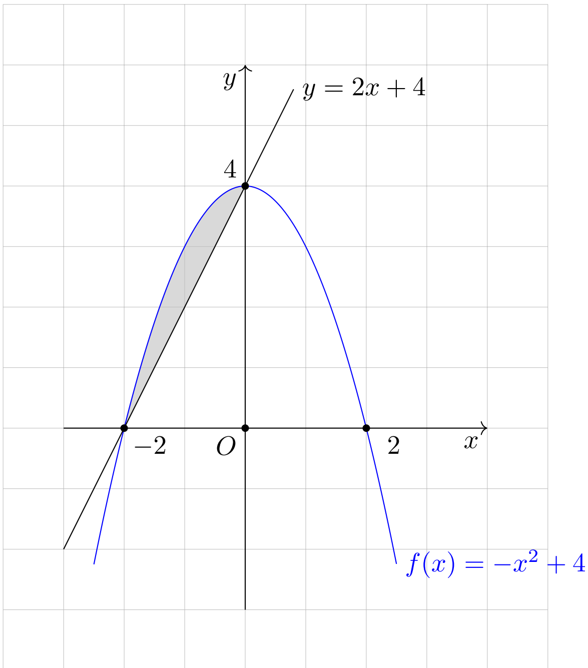
Από τον πίνακα προσήμου της αλγεβρικής παράστασης $h(x) = f(x) - g(x) = -x(x + 2)$ έχουμε ότι $h(x) \leq 0$ για $x \in (-\infty, -2]$ ή για $x \in [0, +\infty)$ και $h(x) \geq 0$ για $x \in [-2, 0]$ με ισότητες μόνο για $x = 0$ ή $x = -2$.

α) Άρα, (με διαμερίσεις ως προς των άξονα των τετμημένων)

$$\begin{aligned}
E &= \int_{-2}^{0} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_{-2}^{0} (f(x) - g(x))\, dx \\
&= -\int_{-2}^{0} (x^2 + 2x)\, dx = -\left[\frac{x^3}{3} + x^2\right]_{-2}^{0} \\
&= \frac{(-2)^3}{3} + (-2)^2 = -\frac{8}{3} + 4 \\
&= \frac{4}{3} \text{ τ.μ..}
\end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-2}^{0} (f^2(x) - g^2(x))\, dx = \pi \int_{-2}^{0} ((4-x^2)^2 - 4(x+2)^2)\, dx \\
&= \pi \int_{-2}^{0} (16 - 8x^2 + x^4 - 4x^2 - 16x - 16)\, dx = \pi \int_{-2}^{0} (x^4 - 12x^2 - 16x)\, dx \\
&= \pi \left[\frac{x^5}{5} - 4x^3 - 8x^2 \right]_{-2}^{0} = -\pi \left[\frac{(-2)^5}{5} - 4(-2)^3 - 8(-2)^2 \right] \\
&= -\pi \left[-\frac{32}{5} + 32 - 32 \right] = \frac{32\pi}{5} \text{ κ.μ..}
\end{aligned}$$



> **A8.** Θεωρούμε τον κύκλο (με εξίσωση) $x^2 + y^2 - \lambda x - 2\lambda y + k - 1 = 0$. Να βρείτε (τα) $k, \lambda \in \mathbb{R}$, για τα οποία ο κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων και η ευθεία $y = 3x + 1$ τέμνει τον κύκλο σε σημεία A και B, έτσι ώστε η γωνία AOB να είναι ορθή, όπου O η αρχή των αξόνων.

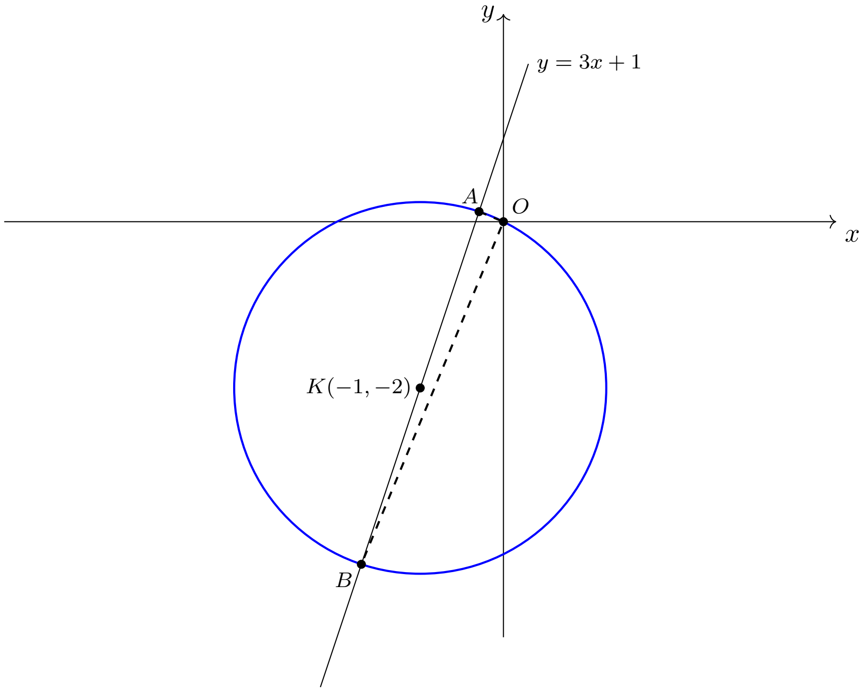
Απάντηση

Ο κύκλος περνά από την αρχή των αξόνων αν και μόνο αν οι συντεταγμένες της αρχής των αξόνων ικανοποιούν την εξίσωσή του, δηλαδή αν και μόνο αν $k - 1 = 0$, δηλαδή αν και μόνο αν $\boxed{k = 1}$.
Τώρα, $2g = -\lambda \Rightarrow g = -\frac{\lambda}{2}$ και $2f = -2\lambda \Rightarrow f = -\lambda$. Το κέντρο του κύκλου[2] είναι το $K(-g, -f) \equiv K\left(\frac{\lambda}{2}, \lambda\right)$.
Η γωνία AOB να είναι ορθή αν και μόνο αν (γνωστό αποτέλεσμα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας) το ευθύγραμμο τμήμα είναι διάμετρος του κύκλου. Τότε, το K είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος AB και αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες του στην εξίσωση της ευθείας έχουμε $\lambda = 3 \cdot \frac{\lambda}{2} + 1 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = -2}$.

[2] Συγκεκριμένα, του εξαρτώμενου από την παράμετρο λ κύκλου C_λ.

Ο ζητούμενος κύκλος έχει κέντρο το $K(-1,-2)$ και ακτίνα $R=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$ και συνεπώς η εξίσωσή του είναι η

$$x^2+y^2+2x+4y=0 \quad \text{ή, ισοδύναμα,} \quad (x+1)^2+(y+2)^2=5.$$



Α9. Δίνεται η λέξη «**ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ**».

α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.
β) Να βρείτε πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς αρχίζουν με τη λέξη «**ΑΞΙΟΣ**».
γ) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης «ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ» στους οποίους το «Α» προηγείται του «Λ» και το «Λ» προηγείται του «Σ».

Απάντηση

Γράμματα στη λέξη **ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ**: 1Α, 1Ξ, 2Ο, 1Λ, 2Η, 1Σ, 1Γ, 1Ι.

α) το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης είναι ίσο με τις επαναληπτικές μεταθέσεις 10 γραμμάτων από τα οποία τα $k_1=2$ είναι μεταξύ τους τα ίδια και διαφορετικά από όλα τα άλλα, και τα $k_2=2$ είναι επίσης τα ίδια και διαφορετικά από όλα τα άλλα:

$$M_{10}^{2,2}=\frac{10!}{2!\cdot 2!}=907200.$$

β) Βήμα 1: Τοποθετούμε τη λέξη **ΑΞΙΟΣ** στην αρχή: 1 τρόπος.

Βήμα 2: Τα υπόλοιπα γράμματα (**1Ο, 1Λ, 2Η, 1Γ**) μετατίθενται μεταξύ τους κατά $!M_5^2=\frac{5!}{2!}=60$ τρόπους.
Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, υπάρχουν συνολικά

$$1\cdot M_5^2=\frac{5!}{2!}=60$$

τρόποι.

γ) Η ιδέα είναι ότι η τοποθέτηση των «Α», «Λ» και «Σ» έτσι ώστε το «Α» προηγείται του «Λ» και το «Λ» προηγείται του «Σ» γίνεται με την επιλογή **απλώς** 3 θέσεων για τα γράμματα αυτά:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = 120$$

τρόπους. Ακολούθως, τα υπόλοιπα 7 γράμματα (**2Ο, 1Ξ, 2Η, 1Γ, 1Ι**) μετατίθενται μεταξύ τους με

$$M_7^{2,7} = \frac{7!}{2!2!} = 1260$$

τρόπους. Σύμφωνα με την **πολλαπλασιαστική αρχή,** έχουμε συνολικά

$$\binom{10}{3} \cdot M_7^{2,7} = 120 \cdot 1260 = 151200$$

τρόπους.

Α10. Έστω το ολοκλήρωμα[α]

$$\int_0^x t^2 \cdot e^{-t}\, dt, \quad \text{με } x > 0.$$

α) Να αποδείξετε ότι

$$I(x) = 2 - \frac{x^2+2x+2}{e^x}, \quad x > 0.$$

β) Να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty} I(x)$.

[α]Κατ' ακρίβειαν είναι μια (καλά ορισμένη, λόγω συνέχειας της $g(t) = t^2 \cdot e^{-t}$) συνάρτηση, η οποία ορίζεται **και** για $x = 0$. Τότε, η λέξη 'με' στον τύπο της πιο κάτω δεν έχει νόημα: είναι συνάρτηση και το x είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και όχι ένας σταθεροποιημένος γνήσια θετικός αριθμός όπως αφήνεται να εννοηθεί.
Πιθανότατα το ερώτημα διατυπώθηκε έτσι με σκοπό οι υποψήφιοι να αντιμετωπίσουν, σε πρώτο στάδιο, αλγεβρικά το ολοκλήρωμα και στο επόμενο ερώτημα να υπολογίσουν το όριο της **συνάρτησης** I.

Απάντηση

α) Ιδέα: ολοκλήρωση κατά παράγοντες (2 φορές):

$$\begin{aligned}
\int_0^x t^2 \cdot e^{-t}\, dt &= \int_0^x t^2 \cdot (-e^{-t})'\, dt \\
&= \left[-t^2 \cdot e^{-t}\right]_0^x - \int_0^x (t^2)' \cdot (-e^{-t})\, dt \\
&= -x^2 \cdot e^{-x} + 2\int_0^x t \cdot e^{-t}\, dt \\
&= -x^2 \cdot e^{-x} + 2\int_0^x t \cdot (-e^{-t})'\, dt \\
&= -x^2 \cdot e^{-x} - 2\left(\left[t \cdot e^{-t}\right]_0^x + \int_0^x t' e^{-t}\, dt\right) \\
&= -x^2 \cdot e^{-x} - 2\left(x \cdot e^{-x} + \int_0^x e^{-t}\, dt\right) \\
&= -x^2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} - 2\int_0^x e^{-t}\, dt \\
&= -x^2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} - 2\left[-e^{-t}\right]_0^x \\
&= -x^2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} + 2(e^{-x} - 1) \\
&= 2 - (x^2 + 2x + 2) \cdot e^{-x} \\
&= 2 - \frac{x^2+2x+2}{e^x}.
\end{aligned}$$

β)

$$\lim_{x\to+\infty} I(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2 - \frac{x^2+2x+2}{e^x}\right).$$

Το όριο $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+2}{e^x}$ υπάρχει (στο εκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών). Πράγματι,

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2+2x+2) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

Άρα έχουμε απροσδιοριστία τύπου $\frac{+\infty}{+\infty}$.
Ισχύουν οι προϋποθέσεις κανόνα υπολογισμού ορίου του De L'Hopital.
Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+2x+2)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+2}{e^x}$$

το οποίο αποτελεί (ξανά) απροσδιοριστία τύπου $\frac{+\infty}{+\infty}$.
Ισχύουν οι προϋποθέσεις κανόνα υπολογισμού ορίου του De L'Hopital.
Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+2)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x} = 0,$$

αφού $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
Συνεπώς, από κανόνα του De L'Hopital,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+2}{e^x} = 0.$$

Άρα,

$$\lim_{x\to+\infty} I(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2 - \frac{x^2+2x+2}{e^x}\right) = 2 - \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+2}{e^x} = 2 - 0 = 2.$$

■

-ΤΕΛΟΣ Α ΜΕΡΟΥΣ-

Μέρος Β

Β1. Έστω η πραγματική συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = x - \frac{4}{x^2}.$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής της με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασής της, αν υπάρχουν, και να την παραστήσετε γραφικά.

Απάντηση

Σκέψεις πριν τη λυση:
Πρόκειται ουσιαστικά για μια **ρητή** συνάρτηση (κάνω ομώνυμα):

$$f(x) = x - \frac{4}{x^2} = \frac{x^3-4}{x^2}.$$

Παρατηρώ ότι ο βαθμός του πολυωνύμου στον αριθμητή (=η μεγαλύτερη δύναμη στην οποία εμφανίζεται η (πραγματική) μεταβλητή x) είναι 3 και ο βαθμός του πολυωνύμου στον παρονομαστή είναι 2, δηλαδή 1 λιγότερο. Ξέρουμε από τη Θεωρία ότι το γράφημα της ρητής αυτής συνάρτησης έχει πλάγια ασύμπτωτη.
Επίσης, η ρίζα του πολυωνύμου στον παρονομαστή (η $x=0$) εμφανίζεται με πολλαπλότητα 2 και άρα ο άξονας των τεταγμένων είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη του γραφήματος της f και μάλιστα το όριο εκατέρωθεν του $x=0$ θα είναι είτε $-\infty$ είτε $+\infty$.

Προχωρώ στη λύση:

• **Πεδίο ορισμού:** $x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και άρα $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

• **Σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων:** Αφού το $x=0$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, έπεται ότι δεν έχουμε σημείο τομής με τον άξονα των τεταγμένων.
Τώρα,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4} \approx 1.587.$$

Άρα, η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες των συντεταγμένων μόνο στο σημείο $(\sqrt[3]{4}, 0)$.

• **Διαστήματα μονοτονίας και τοπικά ακρότατα:** Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \left(x - \frac{4}{x^2}\right)' = 1 - 4\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)' = 1 - 4\cdot\left(\frac{-2}{x^3}\right) = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3+8}{x^3},$$

$x \neq 0$.
Είναι

$$x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{8} = -2.$$

Είναι $f(-2) = -3$. Κατασκευάζουμε των πίνακα μεταβολών του προσήμου της f' :

x	$-\infty$		-2		$0'''$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	$\vert\vert$	$+$	
f		$\nearrow$	-3	$\searrow$	$\vert\vert$	$\nearrow$	

Από τον πιο πίνακα συνάγουμε:
$\forall x \in (-\infty, -2),\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα (λόγω συνέχειας της συνάρτησης στο $x = -2$, μπορούμε να πούμε ότι f γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, -2]$)
$\forall x \in (-2, 0),\ f'(x) < 0 \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα (ομοίως f γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-2, 0)$)
$\forall x \in (0, +\infty),\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα.

Από τα πιο πάνω (κριτήριο πρώτης παραγώγου) έχουμε ότι στο σημείο $(-2, f(-2)) = (-2, -3)$ η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο**.

• Ύπαρξη ασύμπτωτων:
Είναι $D(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Ελέγχω την (ασυμπτωτική) συμπεριφορά της συνάρτησης στα άκρα του πεδίου ορισμού της:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-4}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty.$$

Εκατέρωθεν του $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to\pm 0^-} (x^3-4) \cdot \frac{1}{x^2} = (-4) \cdot (+\infty) = -\infty,$$

αφού $x \to 0^- \Rightarrow x < 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.
Ομοίως,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty.$$

Συνεπώς, η ευθεία $x = 0$ (=ο άξονας των τεταγμένων) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f από τα αριστερά και από τα δεξιά.

Έλεγχος ύπαρξης πλάγιας ασύμπτωτης:
Έλεγχος πλάγιας ασύμπτωτης στο $+\infty$:

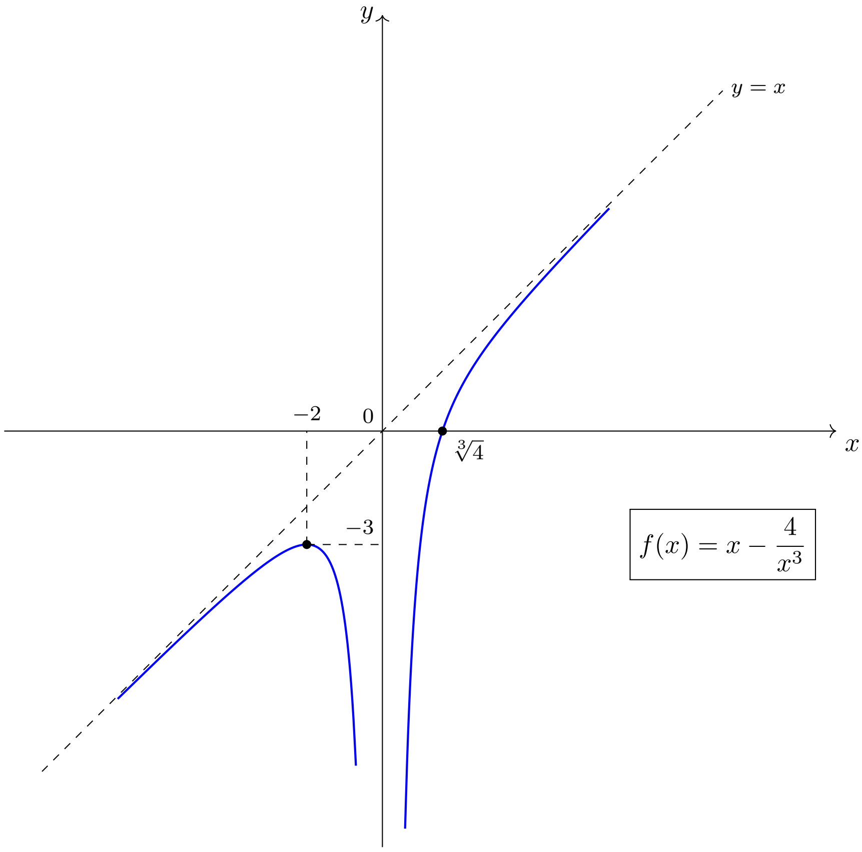
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3-4}{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-4}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 \equiv \lambda.$$

Τότε

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} [f(x) - \lambda \cdot x] &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3-4}{x^2} - x \right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3-4-x^3}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-4}{x^2} \right) = 0 \equiv b. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + b \Leftrightarrow y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.
Έλεγχος πλάγιας ασύμπτωτης στο $-\infty$:
Παρατηρούμε ότι τα πιο πάνω όρια παραμένουν ίδια καθώς $x \to -\infty$ και άρα η ευθεία με εξίσωση $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f και στο $-\infty$.

Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της f με βάση τα πιο πάνω δεδομένα:



B2. Δίνεται κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = R^2$ και τα σημεία του $A(0, R)$, $B(0, -R)$ και $T(R\text{συν}\theta, R\text{ημ}\theta)$, με $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Η ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο T και είναι παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων τέμνει ξανά τον κύκλο στο σημείο Γ.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AT\Gamma B$ είναι ίσο με

$$E = R^2\text{συν}\theta(1 + \text{ημ}\theta).$$

β) Να βρείτε την τιμή του θ έτσι ώστε το εμβαδόν του τετραπλεύρου να είναι μέγιστο.

Απάντηση

Σκέφτομαι πρίν τη λύση: Ο κύκλος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $R > 0$, τα σημεία A και B είναι οι κορυφές του κύκλου στον άξονα των τεταγμένων και το σημείο T βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο.
Το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $x_\Gamma = x_T = R\text{συν}\theta$ και $y_\Gamma = -y_T = -R\text{συν}\theta$.
Επίσης, το τετράπλευρο $AT\Gamma B$ είναι ένα ισοσκελές τραπέζιο.

Το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται συχνά στη βιβλιογραφία (και υπάρχουν διάφορες λύσεις):

> Να βρεθεί το εμβαδόν του μέγιστου τραπεζίου το οποίο μπορεί να εγγραφεί σε κύκλο ακτίνας $R > 0$ και του οποίου η βάση είναι διάμετρος του κύκλου.

(Εδώ μας ζητείται λύση με χρήση πολικών συντεταγμένων[3] του κύκλου, που είναι σχετικά εύκολο,

[3] Πολικές συντεταγμένες είναι οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου που γνωρίζετε.

συγκριτικά με άλλους τρόπους, όπως λόγου χάριν με χρήση καρτεσιανών συντεταγμένων)
Προχωρώ στη λύση της άσκησης:

α) Φέρουμε την προβολή Δ του σημείου T στον άξονα των τεταγμένων. Τότε $(T\Delta) \perp (y - \text{άξονα})$ Αυτό είναι και το ύψος του τραπεζίου $AT\Gamma B$. Τότε

$$\begin{aligned} E(AT\Gamma B) &= \frac{(\text{Βάση } 1 + \text{Βάση } 2) \times \text{ύψος}}{2} \\ &= \frac{((AB) + (T\Gamma)) \times (T\Delta)}{2} \\ &= \frac{(2R + 2R\text{ημ}\theta) \times (R\text{συν}\theta)}{2} \\ &= \frac{2R(1 + \text{ημ}\theta) \times (R\text{συν}\theta)}{2} \\ &= R^2(1 + \text{ημ}\theta) \times \text{συν}\theta. \end{aligned}$$

β) Στο προηγούμενο ερώτημα θεωρήσαμε σταθεροποιημένο σημείο T στο πρώτο τεταρτημόριο και βρήκαμε το αντίστοιχο εμβαδόν. Τώρα, το εμβαδόν θεωρείται **συνάρτηση** (της γωνίας θ):

$$E : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad E(\theta) = R^2(1 + \text{ημ}\theta) \cdot \text{συν}\theta.$$

Η E είναι παραγωγίσιμη με

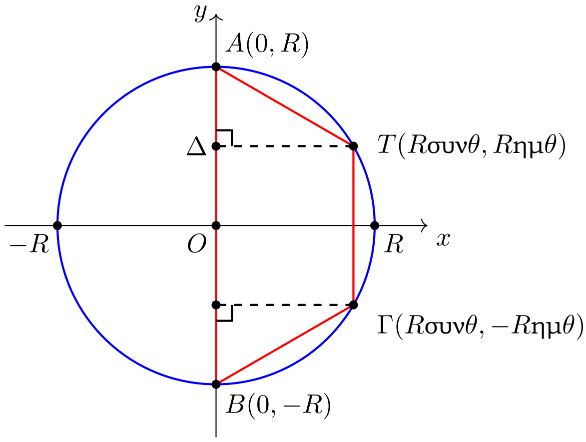
$$\begin{aligned} E'(\theta) &= R^2((1 + \text{ημ}\theta) \cdot \text{συν}\theta)' \\ &= R^2 \cdot [((1 + \text{ημ}\theta)' \cdot \text{συν}\theta) + (1 + \text{ημ}\theta) \cdot (\text{συν}\theta)'] \\ &= R^2 \cdot [\text{συν}\theta \cdot \text{συν}\theta - \text{ημ}\theta(1 + \text{ημ}\theta)] \\ &= R^2 \cdot [\text{συν}^2\theta - \text{ημ}\theta - \text{ημ}^2\theta] \\ &= R^2 \cdot [1 - \text{ημ}^2\theta - \text{ημ}\theta - \text{ημ}^2\theta] \\ &= -R^2 \cdot [2\text{ημ}^2\theta - \text{ημ}\theta - 1] \\ &= -R^2 \cdot (2\text{ημ}\theta - 1) \cdot (\text{ημ}\theta + 1). \end{aligned}$$

Άρα,

$$E'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 2\text{ημ}\theta - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad \text{ημ}\theta + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{ημ}\theta = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \text{ημ}\theta = -1.$$

Αλλά, η γωνία θ βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και άρα $0 < \text{ημ}\theta < 1$ και η οξεία γωνία που ικανοποιεί την $\text{ημ}\theta = \frac{1}{2}$ είναι η $\boxed{\theta = \frac{\pi}{6}}$.

Κάνοντας τον πίνακα προσήμου της E' (διαφορετικά, αν αυτό φαίνεται δύσκολο, χρησιμοποιήστε το κριτήριο δευτέρας παραγώγου: $E''(\pi/6) < 0$ και άρα η E παρουσιάζει τοπικό (που είναι και ολικό) μέγιστο για $\theta = \pi/6$) η E παρουσιάζει τοπικό (που είναι και ολικό) μέγιστο για $\theta = \pi/6$.



Σημείωση: Για $\theta = \pi/6$ παίρνουμε $T\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}, \frac{R}{2}\right)$, $\Gamma\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}, -\frac{R}{2}\right)$ και μέγιστο εμβαδόν

$$E = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} \text{ τ.μ..}$$

B3. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $a > 0$.

α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = -x$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{a} f(-x)\,dx.$$

β) Αν $g(x) = f(x) + f(-x)$, $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} g(x)\,dx.$$

γ) Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{x^3 - \text{ημ}^5 x}{x^2 + 16} + \text{συν}2x\right) dx.$$

Απάντηση

α) Χρησιμοποιώ την αντικατάσταση $u = -x$:

$$u = -x \Leftrightarrow -u = x, \quad dx = -du$$

και $x = -a \Leftrightarrow u = a$, $\quad x = a \Leftrightarrow u = -a$. Τότε,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{-a} f(-u)\,du = \int_{-a}^{a} f(-u)\,du \equiv \int_{-a}^{a} f(-x)\,dx.$$

β) 1ος τρόπος:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{-a}^{a} g(x)\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} (f(x) + f(-x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx + \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-a}^{a} f(-x)\,dx}_{=\int_{-a}^{a} f(x)\,dx} \\
&= \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx \\
&= \int_{-a}^{a} f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

2ος τρόπος:

$$
\begin{aligned}
g(x)=f(x)+f(-x),\ \forall x\in[-a,a] \quad &\Rightarrow \quad \int_{-a}^{a} g(x)\,dx=\int_{-a}^{a}(f(x)+f(-x))\,dx\\
&\Rightarrow \quad \int_{-a}^{a} g(x)\,dx=\int_{-a}^{a} f(x)\,dx+\underbrace{\int_{-a}^{a} f(-x)\,dx}_{=\int_{-a}^{a} f(x)\,dx}\\
&\qquad\ \ =2\int_{-a}^{a} f(x)\,dx\\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} g(x)\,dx=\int_{-a}^{a} f(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

γ) Θα χρησιμοποιήσουμε τα πιο πάνω.
$a=\pi$ και $f(x)=\frac{x^3-\text{ημ}^5x}{x^2+16}+\text{συν}2x$.
Έχουμε για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$,

$$
\begin{aligned}
f(x)+f(-x) &= \frac{x^3-\text{ημ}^5x}{x^2+16}+\text{συν}2x+\frac{(-x)^3-\text{ημ}^5(-x)}{(-x)^2+16}+\text{συν}(-2x)\\
&= \frac{x^3-\text{ημ}^5x}{x^2+16}+\text{συν}2x+\frac{-x^3+\text{ημ}^5x}{x^2+16}+\text{συν}2x\\
&= \frac{x^3-\text{ημ}^5x}{x^2+16}-\frac{x^3-\text{ημ}^5x}{x^2+16}+2\text{συν}2x\\
&= 2\text{συν}2x
\end{aligned}
$$

και άρα, από το ερώτημα **β)**,

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 2\text{συν}2x\,dx\\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\text{συν}2x\,dx = \left[\frac{1}{2}\text{ημ}2x\right]_{-\pi}^{\pi}\\
&= \frac{1}{2}\left(\text{ημ}(2\pi)-\text{ημ}(-2\pi)\right)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

'Αλλος' τρόπος: η συνάρτηση $g(x)=\frac{x^3-\text{ημ}^5x}{x^2+16}$ είναι *περιττή* στο συμμετρικό περί το $x=0$ διάστημα $[-\pi,\pi]$ και άρα

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx=0$$

και συνεπώς,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{x^3-\text{ημ}^5x}{x^2+16}+\text{συν}2x\right)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\text{συν}2x\,dx=0.$$

Σημείωση: Η συνάρτηση $g(x)=2\text{συν}(2x),\ \ x\in[-\pi,\pi]$ είναι άρτια και άρα

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx=2\int_{0}^{\pi} g(x)\,dx=\ldots=0.$$

B4. Δίνεται η συνάρτηση f με (τύπο) $f(x) = \ln x - \sqrt{x}, \quad x \in (0, +\infty)$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και την ύπαρξη σημείων καμπής.
β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x = 1$ είναι η $x - 2y - 3 = 0$.
γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (0, 16)$ ισχύει

$$x + 2\sqrt{x} \geq 3 + \ln(x^2).$$

Απάντηση

α) Η f είναι δις παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της (ως διαφορά δύο δις παραγωγίσιμων συναρτήσεων), άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε εργαλεία του Διαφορικού Λογισμού για να τη μελετήσουμε ως προς την κυρτότητα:
για $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln x - \sqrt{x})' = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \Rightarrow f''(x) &= -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} \cdot (x^{-1/2})' \\ &= -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-3/2} \\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4x^{3/2}} = \frac{1}{4x^{3/2}} - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{x^{1/2}}{4} - 1\right) = \frac{\sqrt{x} - 4}{4x^2}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 4 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16.$$

Είναι $f(16) = (16, \ln 16 - \sqrt{16}) = (16, 4\ln 2 - 4)$.
Κατασκευάζουμε των πίνακα μεταβολών του προσήμου της f'' :

x	0		16		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		κοίλη		κυρτή	

Από τον πιο πίνακα συνάγουμε:
$\forall x \in (0, 16),\ f''(x) < 0 \Rightarrow f$ κοίλη
$\forall x \in (16, +\infty),\ f''(x) > 0 \Rightarrow f$ κυρτή.
Από τα πιο πάνω και το ότι $f''(16) = 0$, έχουμε ότι το σημείο $(16, f(16)) = (16, 4\ln 2 - 4)$ είναι σημείο καμπής για τη γραφική παράσταση της f.

β) Είναι $f(1) = \ln 1 - \sqrt{1} = 0 - 1 = -1$.
Η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(1, f(1)) = (1, -1)$ είναι

$$\lambda_{\text{εφ.}} = f'(1) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2\sqrt{1}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Έτσι, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x = 1$ είναι η

$$\begin{aligned} (\text{εφ.}):\ y - (-1) = \lambda_{\text{εφ.}} \cdot (x - 1) &\Leftrightarrow (\text{εφ.}):\ y + 1 = \frac{1}{2} \cdot (x - 1) \\ &\Leftrightarrow (\text{εφ.}):\ 2y + 2 = x - 1 \\ &\Leftrightarrow (\text{εφ.}):\ x - 2y - 3 = 0. \end{aligned}$$

γ) 1ος τρόπος:

Θα γίνει χρήση του πιο κάτω Θεωρήματος:

Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ **δις παραγωγίσιμη** συνάρτηση. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

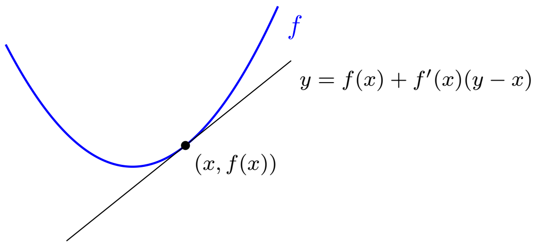
(i) $f'' \geq 0$.

(ii) Η f είναι κυρτή.

(iii) Για κάθε $x, y \in (a, b)$,

$$f(y) \geq f(x) + f'(x) \cdot (y - x). \tag{1}$$

Γεωμετρικά, η ισοδυναμία **(ii)**$\Leftrightarrow$**(iii)**, για την οποία αρκεί να υποθέσουμε μόνο την παραγωγισιμότητα της f (και όχι ότι η f είναι δις παραγωγίσιμη) λέει ότι η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f σε οποιοδήποτε σημείο της $(x, f(x))$ (:η ευθεία με εξίσωση $y = f(x) + f'(x) \cdot (y - x)$) είναι 'κάτω' από τη γραφική της παράσταση, και η ισότητα ισχύει μόνο για το x του σημείου επαφής.



Στην περίπτωση κοίλης συνάρτησης, ισχύει η ανάποδη ανισότητα στην (1) και $f''(x) \leq 0$ στην (i).

Προχωράμε στη λύση:
Αφού η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $(0, 16)$ (όπως είδαμε στο πρώτο ερώτημα) και η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x = 1$ είναι η (εφ.) : $x - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(x - 3)$, σύμφωνα με το πιο πάνω Θεώρημα, έχουμε ότι[4] για κάθε $x \in (0, 16)$,

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \frac{1}{2}(x-3) \\ \Leftrightarrow \ln x - \sqrt{x} &\leq \frac{1}{2}(x-3) \\ \Leftrightarrow 2\ln x - 2\sqrt{x} &\leq x - 3 \\ \overset{(x>0)}{\Leftrightarrow} \ln x^2 - 2\sqrt{x} &\leq x - 3 \\ \Leftrightarrow x + 2\sqrt{x} &\geq 3 + \ln(x^2), \end{aligned}$$

με την ισότητα **μόνο** για $x = 1$.

2ος τρόπος:
Το (σχολικό) βιβλίο *Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου κατεύθυνσης, Α΄ τεύχος, 2η έκδοση, 2019 (ΥΠΠΑΝ)*, το οποίο είναι ανάμεσα στα προτεινόμενα συγγράμματα προετοιμασίας για τις Παγκύπριες εξετάσεις, αναφέρει (σελ. 64), αφού ξανα-ορίζει την κυρτή/κοίλη συνάρτηση στην κλάση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων, αυτή τη φορά:

[4]Συνεπώς, σε μια απευθείας λύση, θα έπρεπε να αναφερθεί ότι 'αφού η f είναι κοίλη **και παραγωγίσιμη** τότε ισχύει η πιο κάτω ανίσωση', διότι, δεδομένου ότι στο σχολικό βιβλίο η κυρτότητα ορίζεται με τον κλασικό της ορισμό και όχι για παραγωγίσιμες συναρτήσεις, μπορούμε εύκολα να βρούμε παράδειγμα κοίλης (ισοδύναμα κυρτής) συνάρτησης που να μην είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Ἡ f είναι κυρτή ή στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο (α, β), αν το διάγραμμά της βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος (α, β), εκτός από το σημείο επαφής.'

Το βιβλίο αυτό δεν παρέχει περισσότερες λεπτομέρειες στο πως μεταφράζεται το πιο πάνω και ιδιαίτερα, δεν αναφέρεται στα Θεωρήματα που καλύπτουν το κενό μεταξύ των ορισμών της κυρτότητας (μέσω ευθειών) και της κυρτότητας για παραγωγίσιμες συναρτήσεις.
Θα δικαιολογούσα λοιπόν πλήρως έναν υποψήφιο, με μόνο οδηγό τα εν λόγω συγγράμματα, να μην επιλέξει τον πιο πάνω τρόπο λύσης αλλά να χρησιμοποιήσει μια **κλασσικότερη μέθοδο**:

$$\forall x \in (0,16), \;\; x + 2\sqrt{x} \geq 3 + \ln(x^2) \Leftrightarrow \forall x \in (0,16), \;\; x + 2\sqrt{x} - 3 - \ln(x^2) \geq 0.$$

Θεωρώ λοιπόν τη συνάρτηση $f : (0,16) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x + 2\sqrt{x} - 3 - \ln(x^2).$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} = \frac{x + \sqrt{x} - 2}{x}, \;\; x \in (0,16).$$

Είναι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 2 = 0.$$

Για να βρούμε τις ρίζες της πιο πάνω εξίσωσης θέτουμε $\sqrt{x} = w$ και τότε η εξίσωση γίνεται:

$$w^2 + w - 2 = 0 \Leftrightarrow (w+2)(w-1) = 0$$

και άρα $w = \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ και η λύση $w = \sqrt{x} = -2$ απορρίπτεται.
Κάνοντας τον πίνακα προσήμου της f' βρίσκουμε ότι λαμβάνει **ολικό ελάχιστο** στο σημείο $(1, f(1)) = (1, 0)$, δηλαδή

$$\begin{aligned} \forall x \in (0,16), &\qquad f(x) \geq f(1) \\ \Leftrightarrow \forall x \in (0,16), &\qquad x + 2\sqrt{x} - 3 - \ln(x^2) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \forall x \in (0,16), &\qquad x + 2\sqrt{x} \geq 3 + \ln(x^2), \end{aligned}$$

με την ισότητα **μόνο** για $x = 1$.

Σημείωση: Η πιο πάνω λύση αντανακλά το πιο κάτω γνωστό αποτέλεσμα:

> Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και κυρτή συνάρτηση. Τότε, η f λαμβάνει ολικό ελάχιστο σε ενα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν και μόνο αν $f'(x_0) = 0$.

B5. Δίνεται η έλλειψη $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ και τυχαίο σημείο της $P(5\text{συν}\theta, 3\text{ημ}\theta), \; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της κάθετης της έλλειψης στο P είναι η

$$5x\text{ημ}\theta - 3y\text{συν}\theta = 16\text{ημ}\theta\text{συν}\theta.$$

β) Η κάθετη της έλλειψης στο P τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο K. Να αποδείξετε ότι η καμπύλη στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του PK είναι έλλειψη.

γ) Αν E η εστία στο θετικό ημιάξονα και ϵ η εκκεντρότητα της έλλειψης $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{EK}{EP} = \epsilon$.

Απάντηση

α) Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα την εξίσωση της έλλειψης (ως προς τη μεταβλητή x):

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \frac{2x}{25}+\frac{2yy'}{9}=0 \Rightarrow y'=-\frac{9x}{25y} \quad (y\neq 0)$$

και άρα αφού $y_P = 3ημθ \neq 0$ (διότι $θ \in (0, π/2)$),

$$λ_{εφ.}(P) = -\frac{9x_P}{25y_P} = -\frac{9\cdot 5συνθ}{25\cdot 3ημθ} = -\frac{3συνθ}{5ημθ}.$$

Συνεπώς,

$$λ_{κάθ.}(P) = -\frac{1}{λ_{εφ.}(P)} = \frac{5ημθ}{3συνθ}$$

και άρα

$$\begin{aligned}
&(κάθ.): \; y-3ημθ = \frac{5ημθ}{3συνθ}(x-5συνθ)\\
\Leftrightarrow\;&(κάθ.): \; (3συνθ)y-9ημθσυνθ = (5ημθ)x-25ημθσυνθ\\
\Leftrightarrow\;&(κάθ.): \; (3συνθ)y-(5ημθ)x = 9ημθσυνθ-25ημθσυνθ\\
\Leftrightarrow\;&(κάθ.): \; (3συνθ)y-(5ημθ)x = -16ημθσυνθ\\
\Leftrightarrow\;&(κάθ.): \; (5ημθ)x-(3συνθ)y = 16ημθσυνθ.
\end{aligned}$$

β) Θέτουμε $y=0$ στην εξίσωση της καθέτου στο P και βρίσκουμε $x=\frac{16}{5}συνθ$. Άρα,

$$K\left(\frac{16}{5}συνθ, 0\right).$$

Τότε

$$x_M = \frac{x_P+x_K}{2} = \frac{5συνθ+\frac{16}{5}συνθ}{2} = \frac{41}{10}συνθ$$

και

$$y_M = \frac{y_P+y_K}{2} = \frac{3ημθ+0}{2} = \frac{3}{2}ημθ.$$

Το σημείο M ανήκει στη έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\left(\frac{41}{10}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1.$$

γ) Έχουμε $α=5>3=β$ και άρα $E(γ,0)$, όπου $γ^2=α^2-β^2=25-9=16 \Rightarrow γ=4$, δηλαδή $E(4,0)$. Επίσης,

$$\epsilon = \frac{γ}{α} = \frac{4}{5}.$$

Άρα, αφού

$$θ\in(0,π/2) \Rightarrow 0<συνθ<1 \Rightarrow 0<\underbrace{\frac{16}{5}συνθ}_{=x_K}<\frac{16}{5}<\frac{20}{5}=4=x_E,$$

έπεται ότι $x_E-x_K>0$ και έτσι

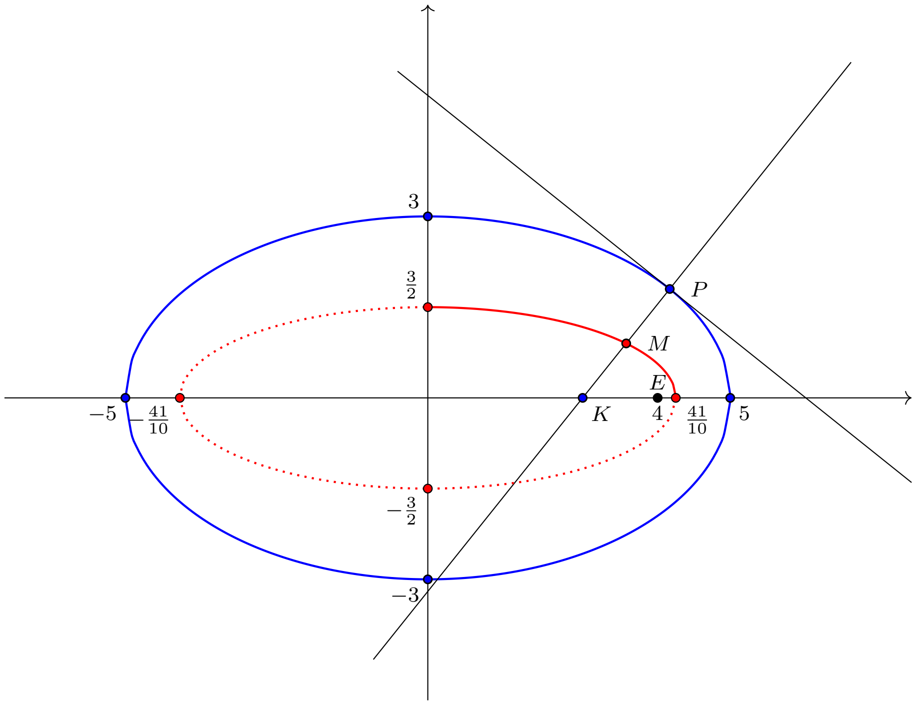
$$EK = |x_E-x_K| = x_E-x_K = 4-\frac{16}{5}συνθ.$$

Επίσης,

$$EP = α-\epsilon\cdot x_P = 5-\frac{4}{5}\cdot 5συνθ = 5-4συνθ.$$

Άρα,

$$\frac{EK}{EP} = \frac{4-\frac{16}{5}συνθ}{5-4συνθ} = \frac{20-16συνθ}{5(5-4συνθ)} = \frac{4(5-4συνθ)}{5(5-4συνθ)} = \frac{4}{5} = \epsilon.$$



■

-ΤΕΛΟΣ Β ΜΕΡΟΥΣ-

¨ Ένας καλός έμπορος κρύβει τους θησαυρούς του και
εμφανίζεται σαν να μην έχει τίποτα.
Ένας καλός τεχνίτης δεν αφήνει ίχνη. ¨

\- Λαό Τσε- *Φιλοσοφία του Τάο (Dao)*