Κεφάλαιο 1

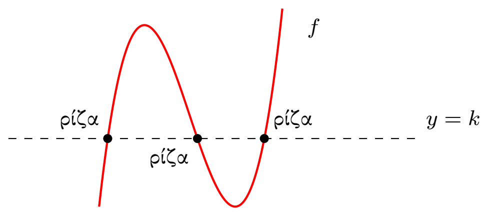
Συνεχείς συναρτήσεις

***

1.1 Ειδικά Θεωρήματα

Θεώρημα 1.1.1. *(Ενδιάμεσης Τιμής)*

Έστω $a < b$ και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν k ένας αριθμός μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$, τότε υπάρχει $c \in [a, b]$ τέτοιος ώστε $f(c) = k$.



Σχήμα 1.1: Θεώρημα 1.1.1

Το πιο πάνω Θεώρημα (με τις υποθέσεις του) μας λέει ότι μια συνεχής συνάρτηση μπορεί να πάρει τιμές όλες τις τιμές της μεταξύ των αριθμών $f(a)$ και $f(b)$. Διαισθητικά, (υποθέτουμε χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι $f(b) > f(a)$) για να πάμε από το σημείο $(a, f(a))$ στο σημείο $(b, f(b))$ του γραφήματός της, τότε αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής, αναγκαστικά θα περάσουμε και από οποιοδήποτε σημείο $(k, f(k))$ μεταξύ των δυο αυτών σημείων.

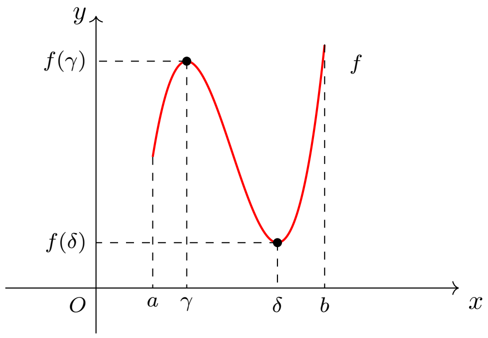
Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $f(a) < \gamma < f(b)$ και θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{x \in [a, b] \,|\, f(x) < \gamma\}.$$

Αφού $f(a) < \gamma$, έπεται ότι $a \in A$ και αρα $A \neq \emptyset$. Επιπλέον, αν $x \in A$, τότε $f(x) < \gamma < f(b)$ και αρα το στοιχείο b είναι ένα ανω φράγμα του συνόλου A. Τότε, από το αξίωμα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών, υπάρχει το $\sup A \equiv s$. Έχουμε $s \in [a, b)$. Αν $f(s) < \gamma$, τότε για $\epsilon = \gamma - f(s) > 0$, λόγω της συνέχειας της συνάρτησης f στο s, θα υπάρχει $\delta \equiv \delta(\epsilon) > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (s, s + \delta)$ να είναι

$$|f(x) - f(s)| < \epsilon.$$

Αλλά τότε η πιο πάνω ανίσωση είναι ισοδύναμη με την $2f(s) - \gamma < f(x) < \gamma$ και αρα $f(x) < \gamma$, ήτοι $x \in A$, άτοπο, από τον ορισμό του s. Συνεπώς, $f(s) \geq \gamma$. Ομοίως, δείχνουμε ότι $f(s) \leq \gamma$. Έτσι, $f(s) = \gamma$. Η περίπτωση $f(b) < \gamma < f(a)$ γίνεται εντελώς ανάλογα.



□

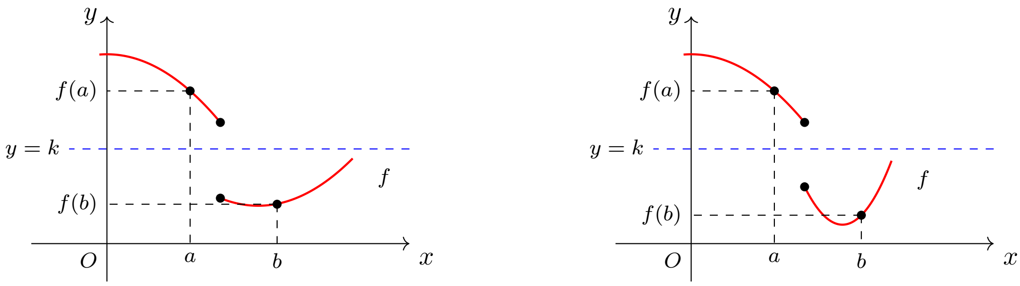
Παρατηρήσεις 1.1.1.

(i) Το Θεώρημα μας λέει ότι οποιοδήποτε αριθμό k πάρουμε στο διάστημα $[f(a), f(b)]$ αν $f(b) > f(a)$ (ή στο διάστημα $[f(b), f(a)]$ αν $f(a) > f(b)$) τότε η εξίσωση $f(\xi) = k$ έχει λύση (στο διάστημα $[a, b]$). Η τελευταία εξίσωση γράφεται ισοδύναμα ως $f(\xi) - k = 0$. Αν λοιπόν οι αριθμοί $f(a)$ και $f(b)$ είναι ετερόσημοι, τότε το πιο πάνω Θεώρημα μας εγγυάται την ύπαρξη λύσης της εξίσωσης $f(\xi) = 0$, δηλ. ότι το γράφημα της f αναγκαστικά τέμνει τον άξονα των τετμημένων.

(ii) Ο αριθμός ξ στο πιο πάνω Θεώρημα δεν είναι κατανάγκην μοναδικός. Κάτω από τις υποθέσεις του Θεωρήματος, μπορεί να υπάρχουν περισσότερα από ενα ξ που να ικανοποιούν το αποτέλεσμά του.

(iii) Ανήκει στην κατηγορία των υπαρξιακών Θεωρημάτων, γιατί ενώ μας εγγυάται την ύπαρξη ενος (τουλάχιστον) αριθμού ξ, δε μας λέει πώς μπορούμε να τον προσδιορίσουμε.

(iv) Χωρίς την υπόθεση της συνέχειας, το αποτέλεσμα του πιο πάνω Θεωρήματος δεν ισχύει (βλ. σχήμα 1.2).



Σχήμα 1.2:

Θεώρημα 1.1.2. *(Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής)*

Μια **συνεχής** συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ λαμβάνει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο (στο $[\alpha, \beta]$). Δηλαδή, υπάρχουν $x_0, x_1 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιοι ώστε

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1), \quad \forall x \in [\alpha, \beta].$$

Απόδειξη.
Βήμα 1
Θα αποδείξουμε ότι η f είναι (ανω και κάτω) φραγμένη. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι αυτή δεν είναι φραγμένη. Τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία $(x_n)_n$ πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $f(x_n) > n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Αφού το διάστημα $[a, b]$ είναι φραγμένο, από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass θα υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})_k$ της $(x_n)_n$ τέτοια ώστε να συγκλίνει. Έστω x το όριο αυτό. Αφού το διάστημα είναι κλειστό, τότε $x \in [a, b]$. Λόγω της συνέχειας της f, αφού $x_{k_n} \to x$, έπεται ότι και $f(x_{k_n}) \to f(x)$. Έτσι, $f(x_{k_n}) > k_n \geq k$, $\forall k$. Συνεπώς, η ακολουθία $(f(x_{k_n}))_k$ αποκλίνει, άτοπο. Συνεπώς, η συνάρτηση f είναι άνω φραγμένη. Ομοίως δείχνουμε ότι η συνάρτηση f είναι κάτω φραγμένη.

Βήμα 2 Θα δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $M = f(\xi)$ και ότι υπάρχει $\eta \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $m = f(\eta)$. Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in [a, b]\} = f([a, b])$$

Εχουμε ότι $A \neq \emptyset$ και από το προηγούμενο βήμα, το σύνολο αυτό είναι ανω και κατω φραγμένο. Θέτουμε $\sup A = M$ και $\inf A = m$. Από τον ορισμό του M, έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $x_n \in [a, b]$ τέτοιο ώστε

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

Χωρίς απώλεια της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_n \to \xi$ όπου $\xi \in [a, b]$ (στην αντίθετη περίπτωση, από το Θεώρημα Βολζανο-Ωειερστρασς, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια υπακολουθία $(x_{k_n})_k$ της $(x_n)_n$ τέτοια ώστε να συγκλίνει στον αριθμό αυτό). Τότε, από τη συνέχεια της f, έχουμε $f(x_n) \to f(\xi)$. Αλλά, αφού $f(x_n) \to M$, από τη μοναδικότητα του ορίου, έπεται ότι $M = f(\xi)$.

Εναλλακτική ΑΠΟΔΕΙΞΗ του Βήματος 2 Υποθέτουμε προς άτοπο, ότι η συνάρτηση f δεν παίρνει μέγιστη τιμή. Θεωρούμε το σύνολο $A = f([a, b])$ όπως πιο πάνω. Τότε, από το Βήμα 1, έχουμε ότι το A είναι ανω (και κάτω) φραγμένο. Έστω λοιπόν $\sup A := M$. Τότε, από την υπόθεσή μας, έχουμε ότι $M \notin A$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = 1/(M - f(x))$ η οποία είναι καλά ορισμένη αφού $M \notin A$ και αρα $M \neq f(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Από ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων, έχουμε ότι η g είναι συνεχής και εύκολα βλέπουμε ότι δεν είναι φραγμένη, άτοπο. Έτσι, η f παίρνει μέγιστη τιμή. Ομοίως δείχνουμε ότι η f παίρνει ελάχιστη τιμή. □

▶ **Παρατηρήσεις 1.1.2.**

Σημείωση:

$$f([a, b]) = \{\ y \in \mathbb{R}\ :\ \exists\, x \in [a, b] \text{ με } f(x) = y\ \}.$$

(i) Το πιο πάνω Θεώρημα μας λέει ότι το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης ορισμένης σε ενα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[\alpha, \beta]$ είναι επίσης κλειστό και φραγμένο διάστημα, δηλ. $f([\alpha, \beta]) = [m, M]$, όπου

$$m = \min_{x \in [\alpha, \beta]} f(x) \qquad \text{και} \qquad M = \max_{x \in [\alpha, \beta]} f(x).$$

(Οι πιο πάνω αριθμοί m και M λαμβάνονται για κάποια x_1 και x_2 αντίστοιχα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$).

Απόδειξη. Είναι $m \leq M$.
Αν $m = M$, τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση.
Έστω ότι $m < M$. Τότε $\forall x \in [a, b] \Rightarrow m \leq f(x) \leq M$ και άρα $f([a, b]) \subseteq [m, M]$.
Έστω τώρα $y \in [m, M]$ και έστω ότι $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, για κάποια $x_1, x_2 \in [a, b]$. Από το Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για τον περιορισμό $f|_{[x_1, x_2]}$ της f στο διάστημα $[x_1, x_2]$, θα υπάρχει

$c \in [x_1, x_2]$ τέτοιο ώστε $f(c) = y$ και άρα $y \in f([a,b])$, δηλαδή $[m, M] \subseteq f([a,b])$. Συνεπώς,

$$f([\alpha, \beta]) = [m, M].$$

$\square$

(ii) Για να μη θεωρούμε κάθε φορά περιπτώσεις είτε $f(b) > f(a)$ είτε $f(a) > f(b)$, αρκεί να λέμε ότι υπάρχει αριθμός στο διάστημα $[m, M]$ όπου m είναι η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή των $f(a)$ και $f(b)$ αντίστοιχα.

(iii) Το αντίστροφο του πιο πάνω δεν ισχύει, δηλ. αν f συνεχής συνάρτηση με σύνολο τιμών κλειστό και φραγμένο διάστημα I, τότε δεν έπεται ότι $f^{-1}(I)$ κλειστό και φραγμένο. Για παράδειγμα, για τη συνεχή συνάρτηση $f(x) = \sin x$, έχουμε ότι $D(f) = \mathbb{R}$ αλλά $R(f) = [-1, 1]$.

(iv) Ενδέχεται η μέγιστη και ελάχιστη τιμή να λαμβάνονται έκαστη σε περισσότερα από ένα σημεία του διαστήματος $[\alpha, \beta]$. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[-\pi/2, 5\pi/2]$. Η μέγιστη τιμή της f είναι η $1 = f(\pi/2) = f(5\pi/2)$ και η ελάχιστη η $-1 = f(-\pi/2) = f(3\pi/2)$.

Εφαρμογή

Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ενα ανοικτό διάστημα δεν έχει πάντοτε σύνολο τιμών που να είναι ανοικτό διάστημα.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = \sin x$, $x \in (0, 5\pi/3)$. Τότε

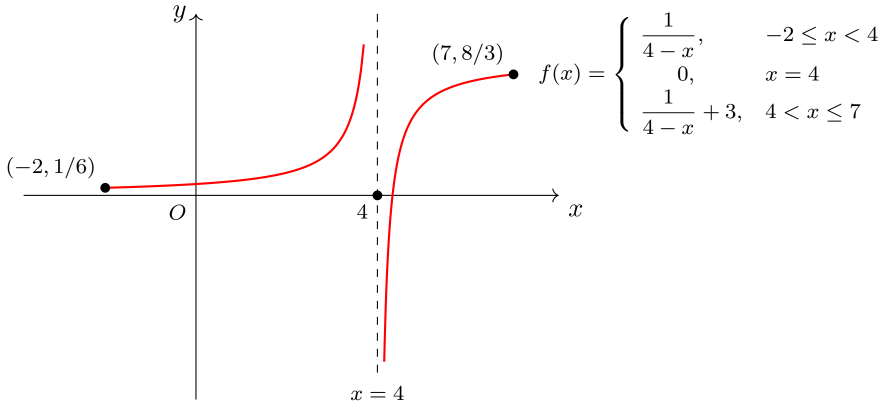
$$f((0, 5\pi/3)) = [-1, 1] = [f(3\pi/2), f(\pi/2)].$$

► **Παρατήρηση 1.1.1.** *Όλες οι συνθήκες στο πιο πάνω Θεώρημα είναι αναγκαίες.*

► **Υπόθεση της συνέχειας:** Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f : [-2, 7] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4-x}, & -2 \le x < 4 \\ 0, & x = 4 \\ \dfrac{1}{4-x} + 3, & 4 < x \le 7 \end{cases}.$$

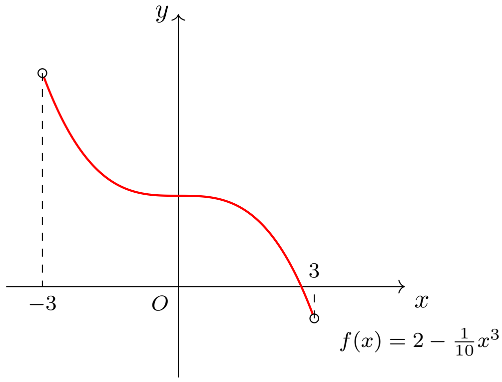
Η f δεν είναι συνεχής στο $D(f) = [-2, 7]$ και δε λαμβάνει ούτε ολικό μέγιστο ούτε ολικό ελάχιστο.



▶ **Υπόθεση του κλειστού διαστήματος:** Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f : (-3,3) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = 2 - \frac{1}{10}x^3.$$

Η f είναι συνεχής στο $D(f) = (-3,3)$, το πεδίο ορισμού της δεν είναι κλειστό διάστημα και δε λαμβάνεί ούτε ολικό μέγιστο ούτε ολικό ελάχιστο.ούτε ολικό ελάχιστο.



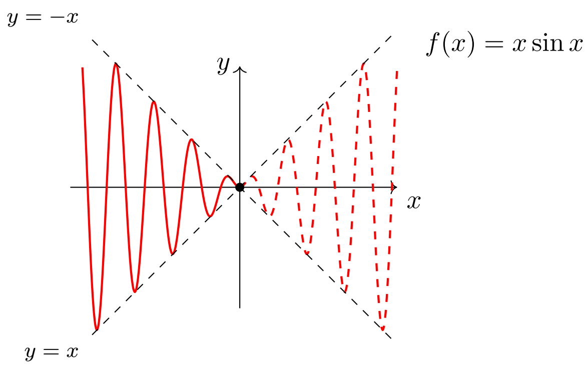
▶ **Υπόθεση του φραγμένου διαστήματος:** Η συνάρτηση

$$f(x) = x\sin x, \quad x \in (-\infty, 0]$$

ή η

$$g(x) = x\sin x, \quad x \in [0, +\infty)$$

είναι συνεχής χωρίς ολικό μέγιστο ή ελάχιστο. ◀



▶ **Παράδειγμα 1.1.1.** *Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f([0,1]) \subseteq [0,1]$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = x_0$.*
Δώστε γεωμετρική ερμηνεία στο πιο πάνω αποτέλεσμα.

Λύση[1]
Αν $f(0) = 0$ ή $f(1) = 1$, τότε μπορούμε να πάρουμε για x_0 το 0 ή το 1.
Αν $f(0) > 0 = \mathrm{id}(0)$, τότε $(f - \mathrm{id})(0) > 0$ και αν $f(1) < 1 = \mathrm{id}(1)$, τότε $(f - \mathrm{id})(1) < 0$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής στη συνάρτηση $g := f - \mathrm{id}$ στο διάστημα $[0,1]$: υπάρχει

[1]Με id συμβολίζουμε την ταυτοτική συνάρτηση, δηλ. $\mathrm{id}(x) = x$.

$x_0 \in [0,1]$ τέτοιος ώστε $g(x_0) = 0$, δηλ. $f(x_0) - \mathrm{id}(x_0) = 0$, δηλ. $f(x_0) = x_0$.

Γεωμετρικά, το πιο πάνω μας λέει ότι μια συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,1]$ θα τέμνει τη διαγώνιο $y = x$, δηλ. το γράφημα της ταυτοτικής συνάρτησης.
Με το ίδιο επιχείρημα (θεωρώντας τη συνάρτηση $g = f + \mathrm{id}$) μπορούμε να δείξουμε ότι η f τέμνει και την άλλη διαγώνιο, δηλ. την $y = -x$. ◀

▶ **Παράδειγμα 1.1.2.** *Να αποδειχθεί το ακόλουθο γενικότερο αποτέλεσμα του προηγούμενου: Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f([0,1]) \subseteq [0,1]$ και έστω $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με $g(0) = 0,\quad g(1) = 1$ ή με $g(0) = 1,\quad g(1) = 0$. Τότε υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.*

Λύση
Αν $f(0) = 0$ τότε μπορούμε να πάρουμε για x_0 το 0 ή το 1, σε κάθε μια από τις υποθέσεις για την g. Ομοίως αν $f(1) = 1$.
Έστω $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $g(0) = 0,\quad g(1) = 1$. Αν $f(0) > 0 = g(0)$, τότε $(f - g)(0) > 0$ και αν $f(1) < 1 = g(1)$, τότε $(f - g)(1) < 0$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής στη συνάρτηση $G := f - g$ στο διάστημα $[0,1]$: υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιος ώστε $G(x_0) = 0$, δηλαδή $f(x_0) - g(x_0) = 0$, δηλαδή $f(x_0) = g(x_0)$. ◀

▶ **Παρατήρηση 1.1.2.** *Το αντίστροφο του Θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής δεν ισχύει εν γένει. Υπάρχει παράδειγμα συνάρτησης η οποία ικανοποιεί το αποτέλεσμα του Θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής αλλά να μην είναι συνεχής.*[2].

Εφαρμογή

Να προσδιοριστούν τα στοιχεία των πιο κάτω συνόλων:

$$\begin{aligned} A &= \{f : [0,1] \to \{1,2\} \mid f \text{ συνεχής}\} \\ B &= \{f : [0,1] \to \{1,2\} \mid f \text{ συνεχής, επί}\}. \end{aligned}$$

▶ **Απάντηση**
Για το σύνολο A : Έστω $f \in A$. Τότε, αφού f συνεχής και $[0,1]$ κλειστό και φραγμένο διάστημα, από το Θεώρημα Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής, έπεται ότι είτε $f(x) = 1,\ \forall x \in [0,1]$, είτε $f(x) = 2,\ \forall x \in [0,1]$, (αφού $f([0,1]) = [m, M]$, όπου $M = \max_{x \in [0,1]} f(x)$ και $m = \min_{x \in [0,1]} f(x)$ και αφού $f([0,1]) \subseteq \{1,2\}$, τότε $m = M$. Άρα, είτε $f \equiv 1$ είτε $f \equiv 2$.)
Αντίστροφα, οι συναρτήσεις $f(x) = 1,\ \forall x \in [0,1]$ και $g(x) = 2,\ \forall x \in [0,1]$ ανήκουν στο A. Συνεπώς, το A αποτελείται από τις 2 αυτές συναρτήσεις και μόνο αυτές

Για το σύνολο B : Έστω $f \in B$. Τότε, όπως και πρίν, θα είναι είτε $f(x) = 1,\ \forall x \in [0,1]$, είτε $f(x) = 2,\ \forall x \in [0,1]$. Αλλά καμία από αυτές δεν είναι επί. Άρα, $B = \emptyset$. Αυτό μπορούμε να το δούμε και ως άμεση συνέπεια του Θεωρήματος Ενδιάμεσης τιμής: αν $f : [0,1] \to \{1,2\}$ συνεχής, τότε, λόγω συνέχειας, η f λαμβάνει όλες τις τιμές μεταξύ των αριθμών 1 και 2, άτοπο (π.χ. δεν υπάρχει $x \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(x) = 1/2$.) ◀

Εφαρμογή

Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $|f(x)| = \pm 1,\ \forall x \in [0,1]$. Τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση.

[2]Συγκεκριμένα, υπάρχει συνάρτηση (Conway base 13 function) για την οποία αν $f(\alpha) < f(\beta)$ και επιλέξουμε οποιοδήποτε αριθμό γ μεταξύ των τιμών $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ τότε, μπορούμε να βρούμε ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \gamma$, αλλά η συνάρτηση αυτή να μην είναι συνεχής.

► **Απάντηση**
Η ιδέα είναι ίδια με την προηγούμενη εφαρμογή, αν φυσικά είμαστε σε θέση να καταλάβουμε ότι η πρόταση $|f(x)| = \pm 1,\ \forall x \in [0,1]$ μεταφράζεται στο ότι το πεδίο τιμών της f είναι το σύνολο $\{-1,1\}$ και αρα, το σύνολο τιμών $R(f)$ της f περιέχεται στο $\{-1,1\}$.

Ας δούμε τώρα την απόδειξη.
Αφού η f είναι συνεχής, τότε $f([0,1]) = [m, M]$, όπου $M = \max_{x\in[0,1]} f(x)$ και $m = \min_{x\in[0,1]} f(x)$ και αφού $f([0,1]) \subseteq \{-1,1\}$, θα είναι είτε $m = M = -1$, είτε $m = M = 1$, δηλ. είτε $f \equiv 1$, είτε $f \equiv -1$.

Διαφορετικά, υποθέτουμε ότι η f δεν είναι σταθερή. Τότε, υπάρχουν x_1 και x_2 στο διάστημα $[0,1]$ τέτοια ώστε $f(x_1) = 1$ και $f(x_2) = -1$. Λόγω της συνέχειας της f, το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής μας λέει ότι η f θα λαμβάνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(x_1) = 1$ και $f(x_2) = -1$, άτοπο[3] αφού $f([0,1]) \subseteq \{-1,1\}$. ◄

Εφαρμογή

Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f^2(x) = g^2(x),\ \forall x \in [a,b]$ και $f(x) \neq 0,\ \forall x \in [a,b]$. Τότε είτε $f(x) = g(x),\ \forall x \in [a,b]$ είτε $f(x) = -g(x),\ \forall x \in [a,b]$.

Ισχύει το συμπέρασμα αν αφαιρέσουμε την υπόθεση της συνέχειας των f και g ή την υπόθεση μια τουλάχιστον εκ των f και g να μη μηδενίζεται;

► **Απάντηση**
Αφού $f(x) \neq 0,\ \forall x \in [a,b]$ και $f^2(x) = g^2(x),\ \forall x \in [a,b]$, τότε θα είναι και $g(x) \neq 0,\ \forall x \in [a,b]$.

Τώρα, $f(x) \neq 0,\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow f(a) \neq 0$. Υποθέτουμε χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι $f(a) > 0$. Τότε, λόγω της συνέχειας της f, θα είναι $f(x) > 0,\ \forall x \in [a,b]$. Πράγματι, αν υπήρχε $x_0 \in [a,b]$ τέτοιο ώστε $f(x) < 0$, από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, υπάρχει $x_0^* \in [a,b]$ τέτοιο ώστε $f(x_0^*) = 0$, άτοπο.
Τότε, αν $g(a) > 0$, όπως και πρίν, θα είναι $g(x) > 0,\ \forall x \in [a,b]$. Συνεπώς, αφού $f^2(x) = g^2(x),\ \forall x \in [a,b]$, έπεται ότι $f(x) = g(x),\ \forall x \in [a,b]$. Αν $g(a) < 0$, τότε (όπως και πρίν) $f(x) = -g(x),\ \forall x \in [a,b]$.

Χωρίς την υπόθεση μια τουλάχιστον εκ των f και g, το αποτέλεσμα δεν ισχύει. Για παράδειγμα, αν $f(x) = x,\ x \in [-1,1]$ και $g(x) = |x|,\ x \in [-1,1]$, τότε $f^2(x) = x^2 = g^2(x),\ \forall x \in [-1,1]$ αλλά $f(x) = -g(x),\ \forall x \in [-1,0]$ και $f(x) = g(x),\ \forall x \in [0,1]$.

Χωρίς την υπόθεση της συνέχειας των f και g, το αποτέλεσμα επίσης δεν ισχύει. Για παράδειγμα, $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x \le 0 \\ 1, & 0 < x \le 1 \end{cases}$ και $g(x) = 1,\ \forall x \in [-1,1]$. Τότε, η f δεν είναι συνεχής (στο $[-1,1]$) και η g δεν ισούται ούτε με την f ούτε με την $-f$ (στο διάστημα $[-1,1]$) οι δυο συναρτήσεις δεν είναι ίσες (ισχύει όμως $\pm f(x) = g(x),\ \forall x \in [-1,1]$ και συγκεκριμένα, $g(x) = f(x),\ \forall x \in [0,1]$ και $g(x) = -f(x),\ \forall x \in [-1,0]$). ◄

[3] Για παράδειγμα, θα υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 1/2 \in \{-1,1\}$.

1.2 Θεώρημα του Bolzano

Πόρισμα 1.2.1. *(Θεώρημα του Bolzano) Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα (κλειστό και φραγμένο) διάστημα $[\alpha, \beta]$. Τότε, αν $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.*

Απόδειξη.
Η υπόθεση $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ μας λέει ότι $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Υποθέτουμε ότι $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$. Τότε, το αποτέλεσμα έπεται αμέσως από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής (για $\xi = 0$). Υποθέτουμε τώρα ότι $f(\beta) < 0 < f(\alpha)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x) = -f(x)$, $\forall x \in [a, \beta]$, δηλ. τη συνάρτηση $-f$. Τότε, $g(\alpha) = -f(\alpha)$ και $g(\beta) = -f(\beta)$ και αρα, αφού $f(\beta) < 0 < f(\alpha)$, έπεται ότι $g(\alpha) < 0 < g(\beta)$. Από την προηγούμενη περίπτωση, θα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$. Αλλά, $g(\xi) = -f(\xi)$ και το συμπέρασμα έπεται. □

► **Παράδειγμα 1.2.1.** *Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 - x^2 + 3x + 1 = 0$ έχει τουλάχιστον δυο λύσεις στο διάστημα $(-2, 0)$.*

Λύση
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^4 - x^2 + 3x + 1$. Η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Είναι $f(-2) = 7 > 0$ και $f(-1) = -2 < 0$ και αρα $f(-2) \cdot f(-1) < 0$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Bolzano για την f στο διάστημα $[-2, -1]$: υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi_0 \in (-2, -1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi_0) = 0$, δηλ. υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi_0 \in (-2, -1)$ τέτοιο ώστε $\xi_0^4 - \xi_0^2 + 3\xi_0 + 1 = 0$. Επίσης, $f(-1) = -2 < 0$ και $f(0) = 1 > 0$ και αρα $f(-1) \cdot f(0) < 0$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Bolzano για την f στο διάστημα $[-1, 0]$: υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $f(\xi_1) = 0$, δηλ. υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $\xi_1^4 - \xi_1^2 + 3\xi_1 + 1 = 0$. Έτσι, η εξίσωση $x^4 - x^2 + 3x + 1 = 0$ έχει τουλάχιστον 2 λύσεις στο διάστημα $(-2, 0)$. ◄

Το πιο πάνω Πόρισμα (γνωστό και ως Θεώρημα του Bolzano) αποδείχθηκε πρώτα από τον Bernard Bolzano το 1817, ο οποίος το εξέδωσε σε ένα οχι ευρέως γνωστό Βοημιανό περιοδικό. Ο Augustin-Louis Cauchy έδωσε μια απόδειξη το 1821. Και οι δύο όμως εμπνεύστηκαν από τη δουλειά του Joseph-Louis Lagrange.

► **Παρατήρηση 1.2.1.** *Το Θεώρημα του Bolzano μας λέει ότι μια συνεχής συνάρτηση σε κλειστό διάστημα με αντίθετες τιμές στα άκρα του διαστήματος αυτού, έχει μια (τουλάχιστον) ρίζα αλλά δεν προσδιορίζει ποιά ακριβώς θα είναι η τιμή του ξ που ικανοποιεί το αποτέλεσμά του.*

1.2.1 Ασκήσεις

$\boxed{\mathbf{1.}}$ Έστω $f : [0,1] \to [-5,-3]$ συνεχής συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = (x-1)f(x) - 2$. Να αποδείξετε ότι:

(i) $g(0) \cdot g(1) < 0$.

(ii) Υπάρχει τουλάχιστον ενα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

(iii) Η εξίσωση $f(x) = 2/(x-1)$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $(0,1)$.

$\boxed{\mathbf{2.}}$ Να αναγραφούν τα στοιχεία του συνόλου

$$A = \{f : [-3,3] \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ συνεχής και } x^2 + f^2(x) = 9, \quad \forall x \in [-3,3]\}.$$

$\boxed{\mathbf{3.}}$ Έστω $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ συνεχής μη-σταθερή συνάρτηση.
(α) Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi_1 \in (0,3)$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi_1) = \frac{2f(1) + 3f(2)}{5}.$$

(β) Αν επιπλέον $f(x) > 0, \ \forall x \in [0,3]$, να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi_2 \in [0,3]$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi_2) = \sqrt{f(1)f(2)}.$$

$\boxed{\mathbf{4.}}$ Έστω $f : [0,1] \to [0,1]$ διαφορίσιμη συνάρτηση με $f'(x) = 1, \ \forall x \in [0,1]$. Να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων του συνόλου

$$A = \{x \in [0,1] \ : \ f(x) = x\}.$$

$\boxed{\mathbf{5.}}$ Έστω $f : [0,1] \to [0,1]$ συνεχής συνάρτηση και $g(x) = x^4, \ x \in [0,1]$. να δειχθεί ότι $\mathrm{Gr}(f) \cap \mathrm{Gr}(g) \neq \emptyset$.
Υπόδειξη: Δες παράδειγμα 1.1.2.