0.8.1 Κεντρικές ροπές συμμετρικών κατανομών

Στο παράδειγμα 7 βρέθηκε ότι η μέση τιμή της διπλωμένης εκθετικής κατανομής είναι ίση με 0. Αυτό αντανακλά το γεγονός ότι η συνάρτηση κατανομής της είναι συμμετρική περί του σημείου $x = 0$, δηλαδή του άξονα των τεταγμένων.

> Μια συνάρτηση f λέγεται **συμμετρική περί του σημείου** $x = c$ (ή συμμετρική ως προς τον κατακόρυφο άξονα $x = c$) αν για κάθε $x \in D(f) \Rightarrow c + x,\ c - x \in A$ και
>
> $$f(c + x) = f(c - x).$$

Με άλλα λόγια, η συνάρτηση f είναι συμμετρική περί του σημείου $x = c$ αν για κάθε σημείο $(c + x, f(x + c))$ του γραφήματός της, το σημείο $(c - x, f(x - c))$ ανήκει επίσης στο γράφημά της.

Για τη μέση τιμή μιας τ.μ. X της οποίας η συνάρτηση πυκνότητας f είναι συμμετρική περί του σημείου $x = c$ έχουμε το ακόλουθο χρήσιμο αποτέλεσμα:

> **Θεώρημα 0.8.2.** *Έστω X τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας f_X και έστω ότι $E[X] < \infty$. Αν η f_X είναι συμμετρική περί του σημείου $x = c$, τότε*
>
> $$\mu_1' = E[X] = c.$$

Απόδειξη.
Περίπτωση 1: η X είναι συνεχής τ.μ.

$$\begin{aligned}
\mu = E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} [c + (x - c)] f_X(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x - c) f_X(x)\,dx + c \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx}_{=1} \\
&= \int_{-\infty}^{c} (x - c) f_X(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} (x - c) f_X(x)\,dx + c \\
&\overset{(*)}{=} \int_{0}^{\infty} y f_X(c - y)\,dy - \int_{0}^{\infty} y f_X(c + y)\,dy + c \\
&= \int_{0}^{\infty} y[f_X(c - y) - f_X(c + y)]\,dy + c \\
&\overset{f_X(c-y)=f_X(c+y)}{=} c.
\end{aligned}$$

$(*)$: για το πρώτο ολοκλήρωμα θεωρήσαμε το μετασχηματισμό $y = c - x \Leftrightarrow x = c - y$ και για το δεύτερο το μετασχηματισμό $y = x - c \Leftrightarrow x = c + y$.

► *Εναλλακτικά:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - c) f_X(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(c - x)\,dx.$$

Η συνάρτηση $g(x) = x f_X(c - x),\ x \in \mathbb{R}$ είναι *περιττή* (ουσιαστικά αποτελεί μετατόπιση της $G(x) = (x - c) f_X(x)$ c μονάδες προς τα αριστερά):

$$g(-x) = -x f_X(c + x) \overset{f_X(c-x)=f_X(c+x)}{=} -x f_X(c - x) = -g(x).$$

Συνεπώς,

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x-c)f_X(x)\,dx = 0.$$

Περίπτωση 2: η X είναι διακριτή τ.μ. και έστω ότι το πεδίο ορισμού της είναι το $\mathbb{Z}$. Τότε

$$\begin{aligned}
\mu = E[X] &= \sum_{x\in\mathbb{Z}} x f_X(x) = \sum_{x\in\mathbb{Z}}[c+(x-c)]f_X(x) \\
&= c\underbrace{\sum_{x\in\mathbb{Z}} f_X(x)}_{=1} + \sum_{x\in\mathbb{Z}}(x-c)f_X(x) \\
&= c + \sum_{x=-\infty}^{c}(x-c)f_X(x) + \sum_{x=c}^{\infty}(x-c)f_X(x) \quad (*).
\end{aligned}$$

Για το πρώτο άθροισμα, θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητής $x = c-y \Leftrightarrow y = c-x$ και τότε $x \sim \{\ldots, c-1, c\} \Leftrightarrow y \sim \{0,1,2,\ldots\}$ και για το δεύτερο την αλλαγή μεταβλητής $x = y+c \Leftrightarrow y = x-c$ και τότε $x \sim \{c, c+1, \ldots\} \Leftrightarrow y \sim \{0,1,2,\ldots\}$.
Τότε

$$\begin{aligned}
(*) &= c - \sum_{y=0}^{\infty} y f_X(c-y) + \sum_{y=0}^{\infty} y f_X(c+y) \\
&= c + \sum_{y=0}^{\infty} y[f_X(c+y) - f_X(c-y)] \\
&\overset{f_X(c-y)=f_X(c+y)}{=} c.
\end{aligned}$$

► *Εναλλακτικός τρόπος απόδειξης:*

Θεωρούμε την τ.μ. $Y = X - c$. Τότε $E[X] = E[X-c] = E[X] - c$. Τότε, λόγω της συμμετρίας της συνάρτησης πυκνότητας f_X της X περί του $x = c$, η συνάρτηση πυκνότητας f_Y της Y είναι συμμετρική περί του άξονα των τεταγμένων. Συνεπώς, $f_Y \equiv f_{-Y}$ και άρα $E[Y] = E[-Y] = -E[Y] \Rightarrow E[Y] = 0$. Άρα, $E[X] = c$. □

Θεώρημα 0.8.3. *Έστω X συνεχής τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας f_X και έστω ότι $\mu_k := E[(X-E[X])^k] < \infty,\ \forall k \in \mathbb{N}$. Αν η f_X είναι συμμετρική περί του σημείου $x = c$, τότε*

$$\mu_k = \begin{cases} 0, & k = 2\ell+1,\ \ell = 0,1,2,\ldots \\ 2\displaystyle\int_0^{\infty} x^k f_X(E[X]+x)\,dx, & k = 2\ell,\ \ell = 1,2,\ldots \end{cases}.$$

Απόδειξη. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$\mu_k = [1+(-1)^k]\int_0^{\infty} x^k f(x+E[X])\,dx.$$

□

Θεώρημα 0.8.4. *Έστω X διακριτή τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας f_X με φορέα το σύνολο $\mathbb{Z}$. Έστω ότι $\mu_k := E[(X - E[X])^k] < \infty$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Αν η f_X είναι συμμετρική περί του σημείου $x = c$, τότε*

$$\mu_k = \begin{cases} 0, & k = 2\ell + 1,\ \ell = 0, 1, 2, \ldots \\ 2\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty} x^k f_X(E[X] + x), & k = 2\ell,\ \ell = 1, 2, \ldots \end{cases}.$$

► Σύμφωνα με τα προηγούμενα, σε μια συμμετρική κατανομή (συμμετρική γύρω από τη μέση της τιμή) οι κεντρικές ροπές περιττής τάξης είναι μηδέν.

► **Παράδειγμα 9** (Κατανομή Laplace)

Αν η τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας την

$$f_X(x; \mu, b) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad b > 0,$$

τότε λέμε ότι η X ακολουθεί την κατανομή (του) Laplace με παραμέτρους μ και b και γράφουμε $X \sim \mathrm{Laplace}(\mu, b)$.

(α΄) Να δείχθεί ότι η f_X είναι πράγματι μια συνάρτηση πυκνότητας κάποιας (συνεχούς) τυχαίας μεταβλητής X.

(β΄) Να βρεθούν η μέση τιμή $E[X]$ και η διασπορά $V[X]$ της X.

Απάντηση.

(α΄) Για να είναι η f συνάρτηση πυκνότητας κάποιας **συνεχούς** τυχαίας μεταβλητής X, πρέπει $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ και $f \geq 0$. Είναι $f > 0$, αφού $b > 0$ και $e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Τώρα, αφού η συνάρτηση f είναι συμμετρική γύρω από το σημείο $x = \mu$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x; \mu, b)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}}\,dx = \frac{2}{2b}\int_{\mu}^{\infty} e^{-\left(\frac{x-\mu}{b}\right)}\,dx \\ &\overset{y=\frac{x-\mu}{b}}{=} \frac{b}{b}\int_0^{\infty} e^{-y}\,dy = -\left[e^{-y}\right]_0^{+\infty} \\ &= 1, \end{aligned}$$

αφού

$$\lim_{y\to+\infty} e^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e^y} = 0.$$

► Η σταθερά νορμαρισμού εδώ είναι η $2b$.

(β΄)

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x; \mu, b)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2b} x e^{-\frac{|x-\mu|}{b}}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2b}((x-\mu) + \mu) e^{-\frac{|x-\mu|}{b}}\,dx \\ &= \mu\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}}\,dx + \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) e^{-\frac{|x-\mu|}{b}}\,dx \\ &\overset{y=\frac{x-\mu}{b}}{=} \mu + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-|x|}\,dx \end{aligned}$$

αφού
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x;\mu,b)\, dx = 1.$$
Η συνάρτηση $g(x) = xe^{-|x|}$ είναι περιττή και άρα
$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-|x|}\, dx = 0.$$
Συνεπώς
$$E[X] = \mu.$$
Για τη **διασπορά** της X,
$$\begin{aligned} V[X] &= E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x;\mu,b)\, dx \\ &= \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{|x-\mu|}{b}}\, dx \\ &= \frac{1}{b}\int_{0}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{x-\mu}{b}}\, dx \\ &\overset{y=\frac{x-\mu}{b}}{=} b^2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-x}\, dx \\ &= b^2 \int_0^{\infty} x^{3-1} e^{-x}\, dx \\ &= b^2\Gamma(3) = b^2 2! = 2b^2. \end{aligned}$$

◀

Παρατήρηση 0.7. *Η διπλωμένη εκθετική κατανομή είναι κατανομή Laplace με παραμέτρους $\mu = 0$ και $b = 1$.*

▶ **Παράδειγμα 10** (Θέμα 3/Εξετάσεις Φεβρουαρίου 2006, Ομάδα Β (ΕΚΠΑ))

Έστω η συνάρτηση
$$f(x) = ce^{-|x-3|}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad c > 0.$$

(α΄) Να υπολογισθεί η σταθερά c ώστε η f να είναι συνάρτηση πυκνότητας κάποιας (συνεχούς) τυχαίας μεταβλητής X.

(β΄) Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X.

(γ΄) Να υπολογισθούν η μέση τιμή και η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X.

(δ΄) Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής $Y = e^{X-3}$.

Απάντηση.

(α΄) Για να είναι η f συνάρτηση πυκνότητας κάποιας **συνεχούς** τυχαίας μεταβλητής X, πρέπει $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$ και $f \geq 0$. Είναι $f > 0$, αφού $c > 0$ και $e^{-|x-3|} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Τώρα, η συνάρτηση f είναι συμμετρική γύρω από το σημείο $x = 3$. Άρα,
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} ce^{-|x-3|}\, dx = 2c\int_3^{\infty} e^{-(x-3)}\, dx \\ &= 2c\int_0^{\infty} e^{-t}\, dt = -2c\left[e^{-t}\right]_0^{+\infty} \\ &= 2c, \end{aligned}$$

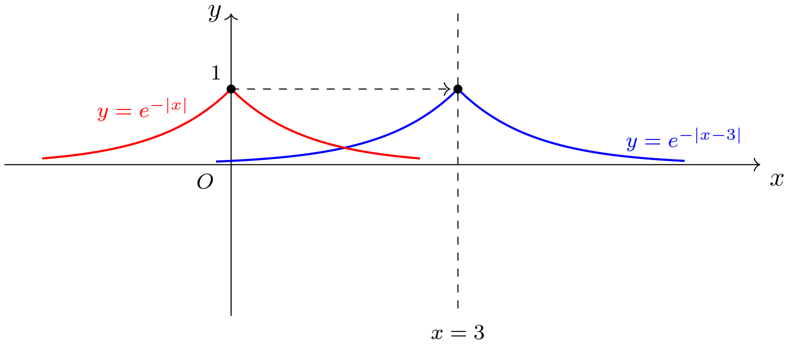
αφού
$$\lim_{t\to+\infty} e^{-t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{e^t} = 0.$$
Άρα,
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow 2c = 1 \Leftrightarrow \boxed{c = \frac{1}{2}}.$$
Συνεπώς,
$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-3|}, \quad -\infty < x < +\infty.$$
Άρα, $X \sim \mathrm{Laplace}(3,1)$.

(β΄) Για $x < 3$
$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{-|t-3|}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{-(3-t)}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{t-3}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{t-3}\right]_{-\infty}^{x} = \frac{1}{2}e^{x-3} \end{aligned}$$
και αν $x \geq 3$,
$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{2}e^{3-3} + \frac{1}{2}\int_{3}^{x} e^{-|t-3|}\,dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{3-t}\,dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{3-t}\,d(3-t) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[e^{3-t}\right]_{3}^{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{3-x} \\ &= 1 - \frac{1}{2}e^{3-x}. \end{aligned}$$
Άρα,
$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x-3}, & x < 3 \\ \\ 1 - \frac{1}{2}e^{3-x}, & x \geq 3 \end{cases}.$$

Σημείωση: Εύκολα επαληθεύουμε ότι
$$F(+\infty) \equiv \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$$
και
$$F(-\infty) \equiv \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0.$$

(γ΄)
$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}xe^{-|x-3|}\,dx \\ &= 3\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-|x-3|}\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (x-3)e^{-|x-3|}\,dx \\ &= 3 + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-|x|}\,dx \end{aligned}$$

αφού
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-|x-3|}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.$$
Η συνάρτηση $g(x) = xe^{-|x|}$ είναι περιττή και άρα
$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-|x|}\, dx = 0.$$
Συνεπώς
$$E[X] = 3.$$
Αυτό όμως είναι αναμενόμενο (ότι δηλαδή η μέση τιμή της X είναι ίση με 3) αφού η συνάρτηση πυκνότητας $f = e^{-|x-3|}$ είναι συμμετρική περί του $x = 3$:
$$f(3-x) = e^{-|(3-x)-3|} = e^{-|-x|} = e^{-|x|}$$
και
$$f(3+x) = e^{-|(3+x)-3|} = e^{-|x|},$$
δηλαδή
$$f(3+x) = f(3-x).$$



Θα υπολογίσουμε τη **διασπορά** της X, με χρήση του ορισμού αυτής:
$$\begin{aligned}
V[X] &= E[(X-3)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-3)^2 f(x)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (x-3)^2 e^{-|x-3|}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x}\, dx \\
&= \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x}\, dx = \int_{0}^{\infty} x^{3-1} e^{-x}\, dx \\
&= \Gamma(3) = 2! = 2.
\end{aligned}$$

(δ΄) Θεωρούμε το μετασχηματισμό $g(x) = e^{x-3}$. Είναι $y = g(x) = e^{x-3} \Leftrightarrow x = g^{-1}(y) = \ln y + 3,\ y > 0$. Για $y > 0$,
$$\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right| = \frac{1}{y}$$

και από γνωστό Θεώρημα,

$$f_Y(y) = \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right| \cdot f_X(g^{-1}(y)) = \frac{1}{2y}e^{-|\ln y|} \quad (y > 0).$$

Για $y \in (0,1) \Rightarrow \ln y < 0 \Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{2y}e^{\ln y} = \frac{1}{2}$ και για $y \geq 1 \Rightarrow \ln y \geq 0 \Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{2y}e^{-\ln y} = \frac{1}{2y}e^{\ln(1/y)} = \frac{1}{2y^2}$ και άρα

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0] \\ \frac{1}{2}, & y \in (0,1) \\ \frac{1}{2y^2}, & y \in [1, \infty) \end{cases}.$$

■

Βιβλιογραφία

[1] Χ. Χαραλαμπίδη, *Θεωρία Πιθανοτήτων και εφαρμογές*, Τεύχος 1, 2η Έκδοση, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2000

[2] Χ. Χαραλαμπίδη, *Θεωρία Πιθανοτήτων και εφαρμογές*, Τεύχος 2, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1999

[3] Χ. Χαραλαμπίδη, *Ασκήσεις Πιθανοτήτων*, Τεύχος 1, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1993

[4] Χ. Χαραλαμπίδη, *Συνδυαστική*, Τεύχος 1, 2η Έκδοση, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2000

[5] P. L. Meyer, *Introductory Probability and Statistical applications*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1970