Ροπογεννήτρια

Ορισμός 0.0.5. *Έστω X τυχαία μεταβλητή.* ***Ροπογεννήτρια*** *(moment-generating function (mgf)) της X καλείται η συνάρτηση*

$$M_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad M_X(t) = E[e^{tx}],$$

για όλα εκείνα τα t για τα οποία $E[e^{tx}] < +\infty$.

► Στην περίπτωση που η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή, η ροπογεννήτρια είναι η

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx$$

ενω αν είναι διακριτή με πεδίο ορισμού το $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$,

$$M_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{tx_k} f_X(x_k).$$

Παραδείγματα 0.0.1.

[1] Έστω $X \sim B(n,p) \quad \Rightarrow f_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n.$
Έχουμε:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{tx}] = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (e^t p)^x (1-p)^{n-x} \\ &\overset{\text{Newton}}{=} [e^t p + (1-p)]^n. \end{aligned}$$

[2] Έστω $X \sim \text{Poisson}(\lambda) \quad (\lambda > 0) \Rightarrow f_X(x) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$.
Έχουμε:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{tx}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το ανάπτυγμα κατά Maclaurin της $y = e^x$: $\quad e^x = \sum_{x=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

[3] Έστω $X \sim \text{Exp}(\theta) \quad (\theta > 0) \Rightarrow f_X(x) = \theta e^{-\theta x} \chi_{[0,+\infty)}(x)$.
Έχουμε:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{tx}] = \int_0^{\infty} e^{tx} \theta e^{-\theta x}\, dx \\ &= \theta \int_0^{\infty} e^{(t-\theta)x}\, dx. \end{aligned}$$

Αν $t = \theta$, τότε το ανωτέρω ολοκλήρωμα αποκλίνει.
Αν $t \neq \theta$, τότε

$$\theta \int_0^{\infty} e^{(t-\theta)x}\,dx = \frac{\theta}{t-\theta}\left[e^{(t-\theta)x}\right]_0^{\infty}.$$

Αν $t > \theta \Rightarrow t - \theta > 0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{(t-\theta)x} = +\infty$ και άρα το ανωτέρω ολοκλήρωμα αποκλίνει, ενώ αν $t < \theta \Rightarrow t-\theta < 0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{(t-\theta)x} = 0$ και άρα το πιο πάνω ολοκλήρωμα ισούται με $-\dfrac{\theta}{t-\theta} = \dfrac{\theta}{\theta-t}$.
Συνεπώς,

$$M_X(t) = \frac{\theta}{\theta-t} = \frac{1}{1-\frac{t}{\theta}}, \quad \frac{t}{\theta} < 1 \Leftrightarrow t < \theta.$$

[4] Έστω $Z \sim N(0,1) \Rightarrow f_Z(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\chi_{\mathbb{R}}(x)$.
Έχουμε:

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= E[e^{tz}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}\,dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(z^2-2tz)}\,dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(z^2-2tz+t^2)}e^{t^2/2}\,dz \\ &= e^{t^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(z-t)^2}\,dz \\ &= e^{t^2/2}, \end{aligned}$$

αφού

$$Y \sim N(t,1) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(z-t)^2}\,dz = 1.$$

■

Το επόμενο Θεώρημα αιτιολογεί την ονομασία της M_X ως *ροπογεννήτρια* (:γεννήτρια ροπών).

Θεώρημα 0.0.7. *Εαν για μια τυχαία μεταβλητή X η ροπογεννήτρια M_X υπάρχει για $|t| \leq \rho \ \ (\rho > 0)$, τότε:*

(i) *Οι $E[X^n]$ υπάρχουν για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

(ii) *Ισχύει*

$$M_X(t) = E\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tx)^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n E[X^n]}{n!}. \tag{17}$$

Επιπλέον, για $|t| \leq \rho$, η $M_X(t)$ έχει παραγώγους για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη (ως δυναμοσειρά) και

$$\left.\frac{d^n M_X(t)}{dt^n}\right|_{t=0} = E[X^n].$$

Απόδειξη. Έστω ότι η X είναι *διακριτή* τυχαία μεταβλητή με πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ και έστω $t \in [-\rho, \rho]$ σταθεροποιημένο. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_n$ με

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(tx)^k}{k!} f(x), \quad x \in A.$$

Η ακολουθία $(f_n)_n$ συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση $g(x) = e^{tx} f(x)$: για $x \in A$,

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{(tx)^k}{k!} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tx)^k}{k!} f(x) = f(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tx)^k}{k!} = e^{tx} f(x).$$

(Χρησιμοποιήσαμε το ανάπτυγμα Mclaurin της $h(x) = e^x$)
Επίσης, κάθε f_n είναι φραγμένη από ποσότητα ανεξάρτητη του n : για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in A$,

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{(tx)^k}{k!} f(x) \right| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{|tx|^k}{k!} f(x) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|tx|^k}{k!} f(x) = f(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|tx|^k}{k!} \\ &= f(x) e^{|tx|} = f(x) e^{|t| \cdot |x|} \\ &\leq f(x) e^{\rho |x|}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} |f_n(x_k)| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} f(x_k) e^{\rho |x|} = \sum_{\substack{x_k \in A \\ x_k \leq 0}} f(x_k) e^{-\rho x} + \sum_{\substack{x_k \in A \\ x_k > 0}} f(x_k) e^{\rho x} \\ &\leq \sum_{x \in A} f(x) e^{-\rho x} + \sum_{x \in A} f(x) e^{\rho x} \\ &= M_X(-\rho) + M_X(\rho) < +\infty, \end{aligned}$$

αφού από υπόθεση η ροπογεννήτρια M_X υπάρχει για $|t| \leq \rho$.

Από γνωστό Θεώρημα της Ανάλυσης, η ακολουθία $(f_n)_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $g(x) = e^{tx} f(x)$ και άρα

$$\sum_{x \in A} f_n(x) \to \sum_{x \in A} e^{tx} f(x) = M_X(t).$$

Αλλά

$$\sum_{x \in A} f_n(x) = \sum_{x \in A} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} x^k f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \sum_{x \in A} x^k f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} E[X^k]$$

και το συμπέρασμα έπεται.

Ομοίως η περίπτωση που η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή.

□

Εύρεση των κεντρικών ροπών με τη βοήθεια της ροπογεννήτριας
Το Θεώρημα 0.0.7 μας δίνει τρόπο υπολογισμού των κεντρικών ροπών της τυχαίας μεταβλητής X και αυτό οφείλεται, όπως είδαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος, στην ομοιόμορφη σύγκλιση της αντίστοιχης δυναμοσειράς (στο συμπαγές διάστημα $[-\rho, \rho]$):

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{n=0}^{\infty} E[X^n] \frac{t^n}{n!}.$$

Συνεπώς, η $n-$οστή κεντρική ροπή $E[X^n]$ της τ.μ. X είναι ο συντελεστής το όρου $\frac{t^n}{n!}$ στην πιο πάνω δυναμοσειρά. Κατ' επέκτασιν, για να βρούμε τις ροπές $E[X^n]$, αναπτύσσουμε την $M_X(t)$ σε δυναμοσειρά:

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

και εξισώνουμε συντελεστές:

$$c_n = \frac{E[X^n]}{n!} = \frac{M_X^{(n)}(0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N},$$

ισοδύναμα,

$$E[X^n] = M_X^{(n)}(0) = n! c_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

▶ **Παράδειγμα 0.0.8.**

Έστω $X \sim N(0, \sigma^2)$. Θα υπολογίσουμε τις ροπές $E[X^n], \ n = 1, 2, \dots$.
Έχουμε

$$\begin{aligned} M_X(t) &= e^{t \cdot 0} M_X(\sigma t) = M_X(\sigma t) = e^{\frac{(\sigma t)^2}{2}} = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2k}}{2^k k!} t^{2k} \\ &= 1 + 0t + \frac{\sigma^2}{2 \cdot 1} t^2 + 0t^3 + \frac{\sigma^4}{2^2 \cdot 2!} t^4 + \dots \\ &= E[X]t + \frac{E[X^2]}{2!} t^2 + \frac{E[X^3]}{3!} t^3 + \frac{E[X^4]}{4!} t^4 + \dots, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$E[X^n] = \begin{cases} (2k)! \frac{\sigma^{2k}}{2^k k!}, & n = 2k \\ \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases}.$$

■

Η ακόλουθη ιδιότητα της ροπογεννήτριας είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στις εφαρμογές:

Πρόταση 0.0.5. *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή με ροπογεννήτρια $M_X(t)$ και έστω σταθερές a και b. Τότε η ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής $Y = aX + b$ είναι η*

$$M_Y(t) = e^{bt} M_X(at). \tag{18}$$

Απόδειξη.

$$M_{aX+b}(t) = E[e^{t(aX+b)}] = e^{tb} E[e^{(ta)x}] = e^{bt} M_X(at).$$

□

Έπεται ότι (αν X τυχαία μεταβλητή) $M_X(0) = 1$ και $M'_X(0) = \frac{dM_X(t)}{dt}\Big|_{t=0} = E[X]$.

▶ **Παράδειγμα 0.0.9.**

Είδαμε ότι αν $Z \sim N(0,1)$, τότε $M_Z(t) = e^{t^2/2}$. Άρα, $X := \sigma Z + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$ και από την (18),

$$M_X(t) = e^{t\mu} e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = e^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

■

▶ **Παράδειγμα 0.0.10.**

Έστω $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$. Είδαμε ότι $M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$. Έχουμε:

$$M_X'(t) = \frac{d}{dt}\left[e^{\lambda(e^t-1)}\right] = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}$$

$$M_X''(t) = \frac{d}{dt}\left[\lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}\right] = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)} + \lambda^2 e^{2t} e^{\lambda(e^t-1)}$$

και άρα

$$E[X] = M_X'(0) = \lambda e^0 e^{\lambda(e^0-1)} = \lambda$$

$$E[X^2] = M_X''(0) = \lambda e^0 e^{\lambda(e^0-1)} + \lambda^2 e^0 e^{\lambda(e^0-1)} = \lambda + \lambda^2 \ .$$

Από τα πιο πάνω, συμπεραίνουμε εύκολα τη διασπορά της X :

$$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda.$$

■

Βιβλιογραφία

[1] Χ. Χαραλαμπίδη, *Θεωρία Πιθανοτήτων και εφαρμογές*, Τεύχος 1, 2η Έκδοση, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2000

[2] Χ. Χαραλαμπίδη, *Θεωρία Πιθανοτήτων και εφαρμογές*, Τεύχος 2, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1999

[3] Χ. Χαραλαμπίδη, *Ασκήσεις Πιθανοτήτων*, Τεύχος 1, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1993

[4] Χ. Χαραλαμπίδη, *Συνδυαστική*, Τεύχος 1, 2η Έκδοση, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2000

[5] P. L. Meyer, *Introductory Probability and Statistical applications*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1970