

A

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι, ΜΑΡΤΙΟΣ 2004

Θέμα 1. Από μια συνηθισμένη τράπουλα με 52 φύλλα εξάγουμε διαδοχικά και με επανάλυση, 12 φύλλα στην τύχη. (α) Ποια η πιθανότητα να εμφανιστεί τουλάχιστον μία φορά κάποιος από τους 4 άσσους; (β) Πόσοι άσσοι θα εμφανιστούν κατά μέσο όρο; (γ) Ποια η πιθανότητα να εμφανιστεί και άσσος και δεκάρι από τουλάχιστον μία φορά; (δ) Αν ένας παίκτης-τζογαδόρος πληρώνει 1 Ευρώ για κάθε δοκιμή (από τις 12) και πληρώνεται 10 Ευρώ κάθε φορά που εξάγεται άσσος, πόσα Ευρώ θα κερδίσει κατά μέσον όρο στις 12 δοκιμές μαζί;

Θέμα 2. Οι τρεις ποδοσφαιρικές ομάδες Ολυμπιακός, Παναθηναϊκός και Α.Ε.Κ. οργανώνουν μόνες τους ένα τουρνουά ποδοσφαίρου, στο οποίο αρχικά κληρώνονται οι δύο αντίπαλοι στην τύχη, παίζουν μεταξύ τους στον ημιτελικό, και ο νικητής του ημιτελικού αγώνα παίζει με τον τρίτο αντίπαλο στον τελικό. Νικήτρια είναι η ομάδα που κερδίζει στον τελικό. Υποθέτουμε φυσικά ότι δεν υπάρχει ισοπαλία, ότι οι δύο αγώνες αποτελούν στοχαστικά ανεξάρτητα πειράματα τύχης, και ότι ο Ολυμπιακός κερδίζει τον Παναθηναϊκό με πιθανότητα $1/2$ (και χάνει με πιθανότητα $1/2$), ο Ολυμπιακός κερδίζει την Α.Ε.Κ. με πιθανότητα $2/3$ (και χάνει με πιθανότητα $1/3$), ενώ ο Παναθηναϊκός κερδίζει την Α.Ε.Κ. με πιθανότητα $2/5$ (και χάνει με πιθανότητα $3/5$). Θέτουμε B_1 το ενδεχόμενο να κληρωθεί ο Ολυμπιακός με τον Παναθηναϊκό στον ημιτελικό, και αντίστοιχα B_2, B_3 τα ενδεχόμενα να κληρωθεί ο Ολυμπιακός με την Α.Ε.Κ., ο Παναθηναϊκός με την Α.Ε.Κ., και, τέλος, θέτουμε A το ενδεχόμενο όπως Νικητής του τουρνουά αναδειχθεί ο Ολυμπιακός. (α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα να αναδειχθεί Νικητής ο Ολυμπιακός, $P(A)$. (β) Αν είναι γνωστό ότι Νικητής του τουρνουά αναδείχθηκε ο Ολυμπιακός, να υπολογίσετε την πιθανότητα να είχε κληρωθεί ο Ολυμπιακός με τον Παναθηναϊκό στον ημιτελικό. (γ) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B_1 είναι στοχαστικά ανεξάρτητα. (δ) Αν καθεμιά από τις τρεις ομάδες πληρώνει 100 χιλιάδες Ευρώ για τη συμμετοχή της στο τουρνουά και το έπαθλο για τον Νικητή του τουρνουά είναι 250 χιλιάδες Ευρώ (ενώ οι άλλες δύο ομάδες δεν κερδίζουν χρηματικό έπαθλο), να υπολογίσετε το μέσο κέρδος του Ολυμπιακού.

Θέμα 3. Ο χρόνος ζωής X ενός λαμπτήρα είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 100$ ώρες. Διαλέγουμε 8 όμοιους λαμπτήρες και τους θέτουμε σε λειτουργία. Να υπολογιστούν: (α) η πιθανότητα όπως τουλάχιστον δύο λαμπτήρες θα λειτουργούν μετά από 100 ώρες, (β) η πιθανότητα όπως τουλάχιστον ένας λαμπτήρας θα λειτουργεί και τουλάχιστον ένας δεν θα λειτουργεί μετά από 100 ώρες, και (γ) η μέση τιμή $E(Y)$ και η διασπορά $\text{Var}(Y)$ του αριθμού Y των λαμπτήρων που θα λειτουργούν μετά από 100 ώρες.

Θέμα 4. Έστω X μια τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[-3, 2]$, δηλαδή με πυκνότητα

$$f(x) = \frac{1}{5}, \quad -3 \leq x \leq 2.$$

Θέτουμε $Y = X^2$. Να υπολογιστούν (α) η πυκνότητα της Y , (β) η μέση τιμή της Y , και (γ) η διασπορά της Y .

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ 3 ΑΠΟ ΤΑ 4 ΣΕ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!

Μάρτιος 2004

Θέμα 1

(α) $X = \#$ δόσεων υδρού εμφανίζονται στις 12 δοσικές (πραγματογ.)

Κάθε εισαγωγή χαρτών υδρού τις 12 είναι μια ανεξάρτητη δοσική Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $P(\{ε\}) = P =$
 $= P(\text{να εμφανιστεί υδρώς από τους 4 δόσεις})$ και $P(\{α\}) =$
 $= 1 - P = q$

$$P = \frac{4}{52}, \quad q = \frac{48}{52}$$

$$X \sim b(n, p), \quad b(12, \frac{4}{52})$$

$$f_X(x) = P(X=x) = \binom{12}{x} P^x q^{12-x}, \quad x=0, 1, \dots, 12$$

$P(X \geq 1) = P(\text{να εμφανιστεί τουλάχιστον μια φορά υδρώς από τους 4 δόσεις})$

$$= 1 - P(X < 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{12}{0} P^0 q^{12} = 1 - \left(\frac{48}{52}\right)^{12} = 0,6173$$

(β) $E(X) = n \cdot P$ (αφού X διωνυμική. Για αλγόριθμο σε

Θέμα 3) $= 12 \cdot \frac{4}{52} = \frac{48}{52} = 0,923076$

(γ) $A = \text{επιχόρμω να μην εμφανιστεί καδελού δόσης}$

$B = \text{καδελμω} \quad \text{||} \quad \text{10ρλ}$

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = 1 - \left(\frac{48}{52}\right)^{12} - \left(\frac{48}{52}\right)^{12} + \left(\frac{44}{52}\right)^{12}$$

$$(δ) Y = 10X + (12-X)(-1) = 10X - 12 + X = 11X - 12$$

$$E(Y) = E(11X - 12) = 11E(X) - 12 = 11 \cdot 0,923076 - 12$$

$$= -1,846164 \in \mathbb{R} < 0$$

Πρόβλημα 3

X = χρόνος ζωής λαμπίρας (σε ώρες)

$X \sim E(\lambda)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \mu = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{100}$$

(α) Y = πλήθος λαμπίρων που θα λειτουργούν πριν από 100 ώρες
 $Y \sim b(8, p)$, $p = P(X \geq 100) = 1 - P(X < 100) = 1 - P(0 < X \leq 100)$

$$= 1 - \int_0^{100} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - [e^{-\lambda x}]_0^{100} \stackrel{\lambda = 1/100}{=} 1 - (e^{-1} + 1) = \frac{1}{e}$$

$$P(Y=y) = f_Y(y) = \binom{8}{y} \left(\frac{1}{e}\right)^y \left(1 - \frac{1}{e}\right)^{8-y}, \quad y=0,1,\dots,8$$

$$P(Y=2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1)$$

$$= 1 - \binom{8}{0} \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{e}\right)^8 - \binom{8}{1} \frac{1}{e} \left(1 - \frac{1}{e}\right)^7 =$$

$$= 1 - \left(\frac{e-1}{e}\right)^8 - \frac{8}{e} \left(\frac{e-1}{e}\right)^7 = 1 - \left(\frac{e-1}{e}\right)^7 \left(\frac{e-1}{e} - \frac{8}{e}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{e-1}{e}\right)^7 \left(1 - \frac{9}{e}\right)$$

(β) Γ = παγκόσμιο είναι λαμπίρας λειτουργεί και τουλάχιστον ένας δε θα λειτουργεί πριν από 100 ώρες

$$P(\Gamma) = P[(Y \geq 1) \cap (Y \leq 7)] = P(1 \leq Y \leq 7) = \sum_{y=1}^7 \binom{8}{y} p^y (1-p)^{8-y}$$

$$= \sum_{y=0}^8 \binom{8}{y} p^y (1-p)^{8-y} - (1-p)^8 - \binom{8}{8} p^8 (1-p)^0 =$$

$$= 1 - (1 - e^{-1})^8 - \left(\frac{1}{e}\right)^8$$

$$(γ) E(Y) = \sum_{y=0}^8 y \binom{8}{y} p^y (1-p)^{8-y}$$

$$y \binom{8}{y} = y \frac{8!}{y!(8-y)!} = \frac{8!}{(y-1)!(8-y)!} = 8 \frac{(8-1)!}{(y-1)!(8-y)!} = 8 \binom{8-1}{y-1}$$

$$\Rightarrow E(Y) = 8 \sum_{y=1}^8 \binom{8-1}{y-1} p^y (1-p)^{8-y} = 8p \sum_{k=0}^{8-1} \binom{8-1}{k} p^k (1-p)^{(8-1)-k}$$

Newton

$$= 8p (p+q)^7 = 8p$$

$$\text{Var}(Y) = E(Y(Y-1)) + E(Y) - [E(Y)]^2$$

$$E(Y(Y-1)) = \sum_{y=1}^8 y(y-1) \binom{8}{y} p^y (1-p)^{8-y}$$

$$\begin{aligned} 1-p=q \\ &= 8(8-1) \sum_{y=2}^8 \binom{8-2}{y-2} p^y q^{8-y} = 8 \cdot 7 \cdot p \sum_{y=k+2}^8 \binom{8-2}{k} p^k q^{(8-2)-k} \\ &= 8(8-1)p^2 = 8 \cdot 7p^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Var}(Y) = 8 \cdot 7p^2 + 8p - 64p^2 = 8p - 8p^2 = 8p(1-p) = 8p \cdot q$$

Θέμα 4

X συνεχής 2.μ.

$$X \sim U(-3, 2)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{5}, \quad x \in [-3, 2]$$

$$Y = X^2$$

$$(a) F_Y(y) = ;$$

Θαρούμε τη διαμέριση $[-3, 0) \cup [0, 2]$ του $[-3, 2]$.

Ο μετασχηματισμός $y = x^2$ είναι

- 1-1 από το σύνολο $[0, 2]$ στο $[0, 4]$ με

$$g_1^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

- 1-1 από το $[-3, 0]$ στο $[0, 9]$, $g_2^{-1}(y) = -\sqrt{y}$

$$\left| \frac{dg_1^{-1}(y)}{dy} \right| = \frac{1}{2\sqrt{y}} = \left| \frac{dg_2^{-1}(y)}{dy} \right|$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} (f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})), & y \in [0, 4] \\ \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y}), & y \in [4, 9] \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{5\sqrt{y}} & , y \in [0, 4) \\ \frac{1}{10\sqrt{y}} & , y \in [4, 9] \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (b) E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^4 y f_Y(y) dy + \int_4^9 y f_Y(y) dy = \int_0^4 \frac{y}{5\sqrt{y}} dy + \int_4^9 \frac{y}{10\sqrt{y}} dy \\ &= \frac{1}{5} \int_0^4 \sqrt{y} dy + \frac{1}{10} \int_4^9 \sqrt{y} dy = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} y^{3/2} \Big|_0^4 + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3} y^{3/2} \Big|_4^9 \\ &= \frac{2}{15} 4^{3/2} + \frac{1}{15} (9^{3/2} - 4^{3/2}) = \frac{1}{15} 4^{3/2} + \frac{1}{15} 9^{3/2} = \\ &= \frac{1}{15} \cdot 2^3 + \frac{1}{15} 3^3 = \frac{8+27}{15} = \frac{35}{15} \end{aligned}$$

$$(x) \text{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int_0^9 y^2 f_Y(y) dy = \int_0^4 \frac{y^2}{5\sqrt{y}} dy + \int_4^9 \frac{y^2}{10\sqrt{y}} dy \\ &= \frac{1}{5} \int_0^4 y^{3/2} dy + \frac{1}{10} \int_4^9 y^{3/2} dy = \frac{1}{5} \frac{y^{3/2+1}}{3/2+1} \Big|_0^4 + \frac{1}{10} \frac{y^{3/2+1}}{3/2+1} \Big|_4^9 \\ &= \frac{2}{5} \frac{1}{5} y^{5/2} \Big|_0^4 + \frac{1}{10} y^{5/2} \cdot \frac{2}{5} \Big|_4^9 \\ &= \frac{2}{25} 2^5 + \frac{1}{25} (3^5 - 2^5) = \frac{2}{25} \cdot 2^5 - \frac{2^5}{25} + \frac{3^5}{25} \\ &= \frac{2^5 + 3^5}{25} = 11 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Var}(Y) = 11 - \frac{35^2}{15^2} \approx 5.55$$