

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι, Ιανουάριος 2000

Θέμα 1ο: (α) Ας θεωρήσουμε μία ακολουθία τριών ρίψεων ενός κύβου και έστω A το ενδεχόμενο όπως το άθροισμα των ενδείξεων είναι μεγαλύτερο του 10. Δείξτε ότι $N(A) = N(A')$ και συμπεράνετε την πιθανότητα $P(A)$. (β) Έστω ότι A και B ενδεχόμενα με $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ και $P(A \cup B) = \frac{11}{12}$. Να εξετασθεί κατά πόσον τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα και υπολογισθεί η πιθανότητα $P(A - B)$.

Λύση Θέμα 2ο: (α) Ένας παίκτης ρίχνει n φορές ένα σύνθετο νόμισμα. Έστω A το ενδεχόμενο εμφάνισης και των δύο όψεων του νομίσματος και B το ενδεχόμενο εμφάνισης μιας το πολύ φοράς της όψης γράμματα. Να εξετασθεί για $n = 3$ και $n = 5$ κατά πόσον τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα. (β) Ένας δεύτερος παίκτης ρίχνει επίσης n φορές το ίδιο νόμισμα. Να υπολογισθεί η πιθανότητα να φέρει τον ίδιο αριθμό φορών την όψη γράμματα με τον πρώτο.

Θέμα 3ο: Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[a, b]$. (α) Να υπολογισθούν η μέση τιμή $E(X)$ και η διασπορά $V(X)$. (β)

Στη μερική περίπτωση που $E(X) = \frac{1}{2}$ και $V(X) = \frac{3}{4}$ να βρεθούν οι συναρτήσεις πυκνότητας $f_Y(y)$ και κατανομής $F_Y(y)$ της τυχαίας μεταβλητής $Y = |X|$.

Θέμα 4ο: Έστω ότι η απόκλιση X της βολής ενός σκοπευτή από το κέντρο στόχου είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = 2(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Ο σκοπευτής κερδίζει το στοίχημα αν η απόκλιση της βολής του από το κέντρο του στόχου δεν είναι μεγαλύτερη του $1/5$. Να υπολογισθούν (α) η πιθανότητα να απαιτηθούν 4 τουλάχιστο βολές μέχρι να κερδίσει ο σκοπευτής το στοίχημα και (β) η μέση τιμή και η διασπορά του αριθμού Y των βολών που απαιτούνται μέχρι να κερδίσει ο σκοπευτής το στοίχημα.

Απαντήστε σε 3 από 4 θέματα σε 2 ½ ώρες.

Ιανουάριος 2000

Θέμα 1

(α) 3 πύγες ωβου

A = ενδεχόμενο όπως το άθροισμα των ενδείξεων είναι μεγαλύτερο από 10

Ω = διζτηματικός χώρος $= \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mid \omega_i \in \{1, 2, \dots, 6\}\}$

$$N(\Omega) = 6^3$$

$$A = \{(i_1, i_2, i_3) : i_1 + i_2 + i_3 > 10\}$$

A' = ενδεχόμενο όπως το άθροισμα των ενδείξεων είναι ≤ 10

Έστω για διάταξη $(i_1, i_2, i_3) \in A$, δηλ.

$i_k \in \{1, 2, \dots, 6\}$, $k=1, 2, 3$ με $i_1 + i_2 + i_3 > 10$.

$$A \vee j_k = 7 - i_k, k=1, 2, 3 \Rightarrow j_k \in \{1, 2, \dots, 6\}, k=1, 2, 3,$$

$$j_1 + j_2 + j_3 = 21 - (i_1 + i_2 + i_3) \leq 10, \text{ δηλ. } (j_1, j_2, j_3) \in A'$$

Προφανώς $\exists f: A \rightarrow A'$ με $(i_1, i_2, i_3) \rightarrow (j_1, j_2, j_3)$

$$1 \leftrightarrow 1, \text{ ωμ. } (i_1, i_2, i_3) \Leftrightarrow (j_1, j_2, j_3)$$

$$\text{και άρα } N(A) = N(A') \Rightarrow P(A) = P(A')$$

$$P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2} = P(A')$$

$$(β) P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{2}{3}$$

$$P(A \cup B) = \frac{11}{12}$$

$$P(A \cap B) = ;$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{11}{12} = \frac{9+8-11}{12} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = P(A \cap B) \text{ και άρα}$$

ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα

$$P(A \setminus B) = ;$$

$$A \setminus B = A \cap B'$$

$$(A \cap B) \cap (A \cap B') = \emptyset, \text{ δηλ. } (A \cap B) \text{ και } (A \cap B') \text{ διαγώνια και}$$

$$(A \cap B') \cup (A \cap B) = A$$

$$\Rightarrow P(A) = P(A \cap B') + P(A \cap B) \Rightarrow P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Θέμα 2

(α) A = ενδεχόμενο εμφάνισης των 2 δυν
 B = ενδεχόμενο εμφάνισης μιας 10 φορές φοράς με δυν γράμματα

Ω = συνολικός χώρος

$$N(\Omega) = 2^V$$

$A \cap B$ = ενδεχόμενο εμφάνισης μιας αυθαίρες φοράς με δυν γράμματα

A' = ενδεχόμενο εμφάνισης μόνο κεφαλαίων ή μόνο γράμματα

$$V=3$$

$$N(\Omega) = 8$$

$$P(A') = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Ορίσω B_0 = ενδεχόμενο εμφάνισης παριμιάς φορές με δυν γράμματα

B_1 = ———— 11 ———— μιας φοράς με δυν γράμματα

$$P(B) = P(B_0 + B_1) = P(B_0) + P(B_1) = \frac{1}{8} + \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1}}{8} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{8} = P(B_1)$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} = P(A \cap B) \text{ και άρα τα } A, B \text{ είναι ανεξάρτητα}$$

$$V=5$$

$$N(\Omega) = 2^5$$

$$P(A') = \frac{2}{2^5} = \frac{1}{16} \Rightarrow P(A) = \frac{15}{16}$$

$$P(B) = P(B_0 + B_1) = P(B_0) + P(B_1) = \frac{1}{2^5} + \frac{\binom{5}{4} \cdot \binom{1}{1}}{2^5} = \frac{1}{2^5} + \frac{5}{2^5} = \frac{6}{2^5} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2^4} = \frac{3}{16}$$

$$P(A \cap B) = P(B_1) = \frac{5}{2^5}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{15}{2^4} \cdot \frac{3}{2^4} \neq \frac{5}{2^5} = P(A \cap B)$$

και άρα τα A, B δεν είναι ανεξάρτητα

(β) A_k = ενδεχόμενο όπως ο 1ος παίκτης φέρει k φορές των δυν γράμματα, $k=0, 1, \dots, V$

B = επιδεχόμενο διαιρεί ο 2ος ισχυρισμός φέρει ισχύς φορές
 διαιρούμενος δύο και ο 1ος.

$$\begin{aligned}
 P(B) &= \sum_{k=0}^V P(A_k) \cdot P(B|A_k) = \sum_{k=0}^V \frac{\binom{V}{k}}{2^V} \cdot \frac{\binom{V}{k}}{2^V} \\
 &= \frac{1}{2^{2V}} \sum_{k=0}^V \binom{V}{k} \cdot \binom{V}{k} = \frac{1}{2^{2V}} \sum_{k=0}^V \binom{V}{k} \binom{V}{V-k} = \frac{1}{2^{2V}} \binom{2V}{V}
 \end{aligned}$$

$\binom{V}{k} \leftrightarrow \binom{V}{V-k}$
← symmetry

Θέμα 3

X συνεχής τ.μ.

$X \sim U(a, b)$, $b > a$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b], x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 (a) \quad E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{b-a} \Big|_a^b \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{b+a}{2}
 \end{aligned}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{b-a} \Big|_a^b \\
 &= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a) \cdot (a^2 + ab + b^2)}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V(X) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3b^2 - 6ab - 3a^2}{12}$$

$$= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$(b) \quad E(X) = \frac{1}{2} = \frac{b+a}{2} \Rightarrow a+b=1 \Rightarrow a=1-b$$

$$V(X) = \frac{3}{4} = \frac{(b-a)^2}{12} \Rightarrow 9 = (b-a)^2 \Rightarrow b-a = \pm 3$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow 2b-1 = \pm 3 & \begin{cases} 2b-1=3 \Rightarrow b=2, a=-1 \checkmark \\ 2b-1=-3 \Rightarrow b=-1, a=0 \times \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{αφού} \\ b > a \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X \sim U(-1, 2)$$

$$f_X(X) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & X \in [-1, 2] \\ 0, & X \notin [-1, 2] \end{cases} \quad X \in \mathbb{R}$$

$$f_Y(Y) = ; , Y = |X|$$

- Ο μετασχηματισμός $y = |x|$ είναι
- 1-1 από το διάστημα $[-1, 0]$ στο $[0, 1]$ με αντιστροφή του $g_1^{-1}(y) = -y$
 - 1-1 από το $[0, 2]$ στο $[0, 2]$ με $g_2^{-1}(y) = y$

$$\left| \frac{dg_1^{-1}(y)}{dy} \right| = 1 = \left| \frac{dg_2^{-1}(y)}{dy} \right|$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y) + f_X(-y), & y \in [0, 1] \\ f_X(y), & y \in [1, 2] \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & y \in [0, 1] \\ \frac{1}{3}, & y \in [1, 2] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\text{-} \forall y \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = \int_0^y f_Y(t) dt = \int_0^y \frac{2}{3} dt = \frac{2}{3} y$$

$$\text{-} \forall y \in [1, 2] \Rightarrow F_Y(y) = \int_0^1 \frac{2}{3} dt + \int_1^y \frac{1}{3} dt = \frac{2}{3} + \frac{y}{3} - \frac{1}{3} = \frac{y+1}{3}$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{2}{3} y, & y \in [0, 1] \\ \frac{y+1}{3}, & y \in [1, 2] \\ 1, & y > 2 \end{cases}$$

Θέμα 4

X = αριθμός της βοήθειας από το κέντρο του σκάφους

Χ συνεχής τ.μ.

$$f_X(x) = 2(1-x), \quad x \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 1/5) &= P(-\infty < X \leq 1/5) = P(0 < X \leq 1/5) = \int_0^{1/5} f_X(x) dx \\ &= \int_0^{1/5} 2(1-x) dx = \int_0^{1/5} 2 dx - \int_0^{1/5} 2x dx = 2x \Big|_0^{1/5} - x^2 \Big|_0^{1/5} = \\ &= \frac{2}{5} - \frac{1}{25} = \frac{9}{25} = P \end{aligned}$$

Ορίζω μια τ.μ. Y = αριθμός βοήθειας μέχρι να περύνει ο σκαφίστης το σκάφος

$$Y \sim G(P), \quad P = 9/25$$

$\hookrightarrow$ γεωμετρική

$$f_Y(y) = P(Y=y) = P(1-P)^{y-1}, \quad y=1, 2, \dots, \quad (1-P)=q$$

$$\begin{aligned} \text{(α)} P(Y \geq 4) &= 1 - P(Y < 4) = 1 - P(Y=1) - P(Y=2) - P(Y=3) = \\ &= 1 - P \cdot q^0 - P \cdot q - P \cdot q^2 = 1 - \frac{9}{25} - \frac{9}{25} \cdot \frac{16}{25} - \frac{9}{25} \cdot \left(\frac{16}{25}\right)^2 \\ &= 1 - 0,738 = 0,262 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(β)} E(Y) &= \sum_{y=1}^{\infty} y f_Y(y) = \sum_{y=1}^{\infty} y P(1-P)^{y-1} = \sum_{y=1}^{\infty} y P q^{y-1} \\ &= P \sum_{y=1}^{\infty} (q^y)' = P \left(\sum_{y=1}^{\infty} q^y \right)' = P \left(\sum_{y=0}^{\infty} q^y - 1 \right)' = \\ &= P \left(\frac{1}{1-q} - 1 \right)' = \frac{P}{(1-q)^2} = \frac{P}{P^2} = \frac{1}{P} = \frac{25}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= E(Y(Y-1)) + E(Y) - [E(Y)]^2 \\ E(Y(Y-1)) &= \sum_{y=1}^{\infty} y(y-1) P q^{y-1} = P q \sum_{y=2}^{\infty} y(y-1) q^{y-2} = \\ &= P q \left(\sum_{y=2}^{\infty} q^y \right)'' = P q \left(\frac{1}{1-q} \right)'' = P q \cdot \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2q}{P^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Var}(Y) = \frac{2q}{P^2} + \frac{1}{P} - \frac{1}{P^2} = \frac{2q - 1 + P}{P^2} = \frac{2(1-P) + P - 1}{P^2} =$$

$$= \frac{2 - 2P + P - 1}{P^2} = \frac{1 - P}{P^2} = \frac{9}{25} = \frac{\frac{16}{25}}{\frac{9}{25}} = \frac{16 \cdot 25}{81} = \frac{400}{81}$$