

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι, Φεβρουάριος 2002

Θέμα 1°: Έστω ότι ένας ανελκυστήρας τετραώροφου κτιρίου ξεκινά από το ισόγειο με 6 άτομα. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες αποβίβισης ενός τουλάχιστου ατόμου σε καθένα από τους ορόφους (α) 1 και 2 και (β) 1, 2 και 3. Επίσης να υπολογισθούν (γ) η μέση τιμή και (δ) η διασπορά του αριθμού X των ατόμων που αποβιβάζονται στον τέταρτο όροφο.

Θέμα 2°: Ας θεωρήσουμε δύο κληρωτίδες οι οποίες περιλαμβάνουν τους αριθμούς $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ και $\{6, 7, 8, 9\}$, αντίστοιχα. Έστω ότι ένας αριθμός εξάγεται τυχαία από κάθε κληρωτίδα. Αν X είναι η διαφορά του αριθμού που εξάγεται από την πρώτη κληρωτίδα από τον αριθμό που εξάγεται από τη δεύτερη κληρωτίδα, να υπολογισθούν (α) η συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = P(X = x)$, $x = 1, 2, \dots, 8$ και (β) η μέση τιμή $E(X)$. Έστω ότι μετά την εξαγωγή ενός αριθμού από την κάθε κληρωτίδα οι εναπομένοντες 7 αριθμοί τοποθετούνται σε μια νέα κληρωτίδα από την οποία εξάγεται τυχαία ένας αριθμός. (γ) Να υπολογισθεί η πιθανότητα ο αριθμός που εξάγεται από την τρίτη κληρωτίδα να είναι μεγαλύτερος εκείνου που εξάγεται από την πρώτη κληρωτίδα και μικρότερος εκείνου που εξάγεται από τη δεύτερη κληρωτίδα.

Θέμα 3°: Έστω ότι η X είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(x) = \frac{2|x|}{5}, \quad -1 \leq x \leq 2$$

και $Y = X^2$. Να υπολογισθούν (α) οι συναρτήσεις κατανομής $F_X(x)$, $-\infty < x < \infty$ και $F_Y(y)$, $-\infty < y < \infty$. (β) η συνάρτηση πυκνότητας $f_Y(y)$, $-\infty < y < \infty$ και (γ) η μέση τιμή $E(Y)$.

Θέμα 4°: Ας θεωρήσουμε 5 ρίψεις ενός συνήθους νομίσματος και έστω A το ενδεχόμενο εμφάνισης και των δύο όψεων του νομίσματος και B το ενδεχόμενο εμφάνισης μιας το πολύ φορές της όψης κεφαλή. (α) Να εξετασθεί κατά πόσο τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα.

Έστω X μιας συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ 1 - e^{-x^2/2}, & 0 \leq x < \infty \end{cases}$$

Να υπολογιστούν (β) η μέση τιμή $E(X)$ και (γ) η διασπορά $V(X)$.

Απαντήστε σε 3 από 4 θέματα. Διάρκεια εξέτασης: 2 1/2 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Θέμα 1ε

4 όροφοι

6 άτομα

A_i = ενδεχόμενο να μην παύει κανένας i -όροφο, $i=1,2,3$

A_i' = ενδεχόμενο να παύει ένα τουλάχιστον άτομο στον i -όροφο
 $i=1,2,3$

Ω - δειγματοχώρος = $\{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6) \mid \omega_i \in \{f_1, f_2, \dots, f_4\}, i=1,2, \dots, 6\}$

$$N(\Omega) = 4^6$$

(α) A = ενδεχόμενο αποβίβασης ενός τουλάχιστον ατόμου σε καένα από τους ορόφους 1 και 2

$$A = A_1' \cap A_2'$$

$$P(A) = P(A_1' \cap A_2') = 1 - P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(A_1) - P(A_2) + P(A_1 \cap A_2)$$

$$= 1 - \frac{3^6}{4^6} - \frac{3^6}{4^6} + \frac{2^6}{4^6} = 1 - 2 \cdot \frac{3^6}{4^6} + \frac{2^6}{4^6}$$

ή $P(A) = P(A_1' \cap A_2') = \sum_{i=0}^2 (-1)^i \binom{2}{i} \frac{(4-i)^6}{4^6}$ (από το Θώρημα Boole και το ότι τα $A_1', \dots, A_n$ είναι ανεξάρτητα για κάθε επιλογή i διακενών $(i_1, \dots, i_n)$ από τους $1, 2, 3$)

$$1 - \binom{2}{1} \frac{(4-1)^6}{4^6} + \binom{2}{2} \frac{(4-2)^6}{4^6} = 1 - 2 \cdot \frac{3^6}{4^6} + \frac{2^6}{4^6}$$

(β) B = ενδεχόμενο να παύει 1 τουλάχιστον άτομο σε καένα από τους ορόφους 1, 2, 3

$$P(B) = P(A_1' \cap A_2' \cap A_3') = \sum_{i=0}^3 (-1)^i \binom{3}{i} \frac{(4-i)^6}{4^6} =$$

$$= 1 - \binom{3}{1} \frac{3^6}{4^6} + \binom{3}{2} \frac{2^6}{4^6} - \binom{3}{3} \frac{1^6}{4^6}$$

$$= 1 - 3 \cdot \frac{3^6}{4^6} + 3 \cdot \frac{2^6}{4^6} - \frac{1}{4^6}$$

X = αριθμός των ατόμων που απεικονίζονται στον 4^ο δρόμο
 X (διακριτή) τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_X(x) = P(X=x) = \binom{6}{x} \cdot \frac{3^{6-x}}{4^6}, \quad x=0,1,\dots,6$$

(β) Συνάρτηση $E(X) = \sum_{x=0}^6 x \binom{6}{x} \frac{3^{6-x}}{4^6}$

$$x \binom{6}{x} = x \frac{6!}{(6-x)!x!} = 6 \cdot \frac{(6-1)!}{(6-x)!(x-1)!} = 6 \binom{6-1}{x-1}$$

$$\Rightarrow E(X) = \frac{6}{4^6} \sum_{x=1}^6 \binom{6-1}{x-1} 3^{6-x} \stackrel{k=x-1}{=} \frac{6}{4^6} \sum_{k=0}^{6-1} \binom{6-1}{k} 3^{(6-1)-k}$$

Newton
 $= \frac{6}{4^6} \cdot 4^5 = \frac{6}{4} = \boxed{1,5 = E(X)}$

(γ) $\text{Var}(X) = ;$

$$E(X(X-1)) = \sum_{x=0}^6 x(x-1) \binom{6}{x} \frac{3^{6-x}}{4^6} = \frac{6(6-1)}{4^6} \sum_{x=2}^6 \binom{6-2}{x-2} 3^{6-x}$$

$$\stackrel{x-2=k}{=} \frac{6 \cdot 5}{4^6} \sum_{k=0}^{6-2} \binom{6-2}{k} 3^{(6-2)-k} \stackrel{\text{Newton}}{=} \frac{6 \cdot 5}{4^6} 4^4 = \frac{6 \cdot 5}{4^2}$$

$$\text{Var}(X) = E(X(X-1)) + E(X) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{6 \cdot 5}{4^2} + \frac{6}{4} - \frac{36}{4^2} = \frac{30 - 36 + 24}{4^2} = \frac{18}{16}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Var}(X) = 1,125}$$

Φεβρουάριος 2002

Θέμα 2ε

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{6, 7, 8, 9\}$

$X =$ διαφορά του αριθμού που εξάγεται από την 1^η πληρωίδα από τον αριθμό που εξάγεται από την 2^η.

(α) $f(x) = P(X=x)$, $x=1, 2, \dots, 8$
 $1, 2, 3, 4; 5, 6, 7, 8$

Αν θεωρήσουμε την κάθε επιλογή αριθμού από τις 2 πληρωίδες ως ανεξάρτητη δοκιμή έχουμε

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{20} = P(\text{εξαχθεί αριθμός από την 1^η και 1 από την 2^η})$$

$$f(x) = P(X=x) = \begin{cases} \frac{x}{20}, & \text{αν } x=1, 2, 3, 4 \\ \frac{9-x}{20}, & \text{αν } x=5, 6, 7, 8 \end{cases}$$

↓
λόγω συμμετρίας (1, 2, 3, 4; 5, 6, 7, 8)

(β) $E(X) =$;
 $E(X) = \sum_{x=1}^8 x f(x) = \sum_{x=1}^4 \frac{x^2}{20} + \sum_{x=5}^8 \frac{9-x}{20} x$

$$= \frac{1}{20} + \frac{4}{20} + \frac{9}{20} + \frac{16}{20} + \frac{4}{20} \cdot 5 + 6 \cdot \frac{3}{20} + \frac{7 \cdot 2}{20} + \frac{9}{20}$$

$$= \frac{91}{20} = 4,55$$

(γ)

Θέμα 3^ο

$$f_X(x) = \frac{2|x|}{5}, \quad x \in [-1, 2]$$

$$Y = X^2$$

a) $f_X(x), x \in \mathbb{R}$

$F_X(y), y \in \mathbb{R}$

$$f_X(x) = \frac{2|x|}{5} = \begin{cases} -\frac{2x}{5}, & x \in [-1, 0) \\ \frac{2x}{5}, & x \in [0, 2] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} - \text{Av } x \in [-1, 0): F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-1}^x \frac{-2t}{5} dt = -\frac{t^2}{5} \Big|_{-1}^x \\ &= -\frac{x^2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{1-x^2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \text{Av } x \in [0, 2]: F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_{-1}^0 \frac{-2t}{5} dt + \int_0^x \frac{2t}{5} dt = -\frac{t^2}{5} \Big|_{-1}^0 + \frac{t^2}{5} \Big|_0^x = \frac{1}{5} + \frac{x^2}{5} = \frac{1+x^2}{5} \end{aligned}$$

$$\text{Συνολικῶς } F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1-x^2}{5}, & x \in [-1, 0) \\ \frac{1+x^2}{5}, & x \in [0, 2] \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$Y = X^2, \quad y \in [0, 4]$$

ο μετασχηματισμός $y = x^2$ είναι

- 1-1 από το σύνολο $[-1, 0]$ στο $[0, 1]$ με αντιστροφή του

$$g_1^{-1}(y) = -\sqrt{y}$$

- 1-1 από το $[0, 2]$ στο $[0, 4]$ με αντιστροφή του

$$g_1^{-1}(y) = +\sqrt{y}$$

Adol $\left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| = \frac{1}{2\sqrt{y}} = \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} (f_X(-\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y})) & y \in [0, 1] \\ \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) & y \in (1, 4] \end{cases} \quad \begin{matrix} f_Y \in [0, 1] \\ f_Y \in [-1, 0] \end{matrix}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(\frac{-2(-\sqrt{y})}{5} + \frac{2\sqrt{y}}{5} \right) = \frac{2}{5}, & y \in [0, 1] \\ \frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{y}5} = \frac{1}{5}, & y \in [1, 4] \end{cases}$$

- Av $y \in [0, 1]$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(t) dt = \int_0^y \frac{2}{5} dt = \frac{2}{5}y$$

- Av $y \in [1, 4]$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \int_{-\infty}^y f_Y(t) dt = \int_0^1 \frac{2}{5} dt + \int_1^y \frac{1}{5} dt \\ &= \frac{2}{5} + \frac{y}{5} - \frac{1}{5} = \frac{y+1}{5} \end{aligned}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{2}{5}y, & y \in [0, 1] \\ \frac{y+1}{5}, & y \in [1, 4] \\ 1, & y > 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^4 y f_Y(y) dy = \int_0^1 y \frac{2}{5} dy + \int_1^4 y \frac{1}{5} dy \\ &= \frac{y^2}{5} \Big|_0^1 + \frac{y^2}{10} \Big|_1^4 = \frac{1}{5} + \frac{16}{10} - \frac{1}{10} = \frac{17}{10} \end{aligned}$$

Θέμα 4^ο

(α) 5 είδους ενός συνήθους νομίσματος

A = ενδεχόμενο εμφάνισης και των 2 όψεων του νομίσματος

B = ενδεχόμενο εμφάνισης μιας το κρόκο φοράς της όψης κεφαλή

Ω = διζτηρημένος χώρος = $\{(\omega_1, \dots, \omega_5) \mid \omega_i \in \{K, Γ\}, i=1, 2, \dots, 5\}$

$$N(\Omega) = 2^5$$

Ορίσω τα ενδεχόμενα

B_0 = εμφάνιση ακριβώς φοράς της όψης κεφαλή

B_1 = εμφάνιση μιας ακριβώς φοράς της όψης κεφαλή

$$P(B) = P(B_0 + B_1) = P(B_0) + P(B_1) = \frac{1}{2^5} + \frac{\binom{5}{4} \cdot \binom{1}{1}}{2^5}$$

$$= \frac{1}{2^5} + \frac{5}{2^5} = \frac{6}{2^5} = P(B)$$

[Για την $P(B_1)$ εργαζομένη με τις εξής: αυτό τις 5 φορές μιας διότι της $(\omega_1, \dots, \omega_5) \in \Omega$ επιλέγω 4 για την όψη τράχηλα και την μεθεξής 1 για την όψη κεφαλή. Το ωστόσο των τρώων αυτών, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική Αρχή = $\binom{5}{4} \cdot \binom{1}{1} = 5$ τρώωι.]

A' = ενδεχόμενο εμφάνισης μιας τι των 2 όψεων

$$N(A') = 2 \Rightarrow P(A') = \frac{2}{2^5} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{2}{2^5} = 1 - P(A') = \frac{30}{2^5}$$

$A \cap B$ = ενδεχόμενο εμφάνισης μιας ακριβώς φοράς της όψης κεφαλή = $P(B_1) = \frac{5}{2^5}$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{30}{2^5} \cdot \frac{6}{2^5} = \frac{30}{32} \cdot \frac{6}{32} \neq \frac{5}{32} = P(A \cap B)$$

και άρα τα ενδεχόμενα A και B δεν είναι ανεξάρτητα.
ανεξάρτητα

X συνεχής 2. η.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x^2/2}, & x \in [0, \infty) \end{cases}$$

(b) $E(X) = ;$

$$\frac{dF(x)}{dx} = f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x e^{-x^2/2}, & x \in [0, \infty) \end{cases}$$

2ος τρόπος υπολογισμού του

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2/2} dx$$

ή $X \sim N(0,1)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx =$$

$$= \int_0^{\infty} x d(-e^{-x^2/2}) = -x e^{-x^2/2} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x^2/2} dx$$

όμως, $\int_0^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [-x e^{-x^2/2}]_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} (-t e^{-t^2/2}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t}{e^{t^2/2}}$$

$\hookrightarrow$ ορίζεται ορίζομεν ως ορίσμεν ορίζομεν

de L'Hospital

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t e^{t^2/2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

και άρα $E(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(*) $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (Ολοκλήρωμα Euler)

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 d(-e^{-x^2/2}) = -x^2 e^{-x^2/2} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2x e^{-x^2/2} dx$$

$$= 2 \int_0^{\infty} x e^{-x^2/2} dx = 2 \int_0^{\infty} x f_X(x) dx = 2 \cdot E(X)$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2$$