2.2 Ολοκλήρωμα Riemann

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε τη σχέση διαφόρισης και ολοκλήρωσης υπο την έννοια (πότε και αν) οι δυο διαδικασίες να είναι αντίστροφες. Θέλοντας όμως να δώσουμε κάποια Γεωμετρική ερμηνεία στη διαδικασία αυτή, καθαρά από Αναλυτική σκοπιά, παρουσιάζονται αρκετές δυσκολίες. Σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής του Darboux, ακόμα και η ύπαρξη ενός μόνο άλματος ασυνέχειας είναι αρκετή για να αποτρέψει την ύπαρξη παράγουσας.
Επιπλέον, η συνάρτηση

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

είναι διαφορίσιμη στο διάστημα $[0, 1]$ με $F'(x) = f(x), \ \forall x \in [0, 1]$, όπου

$$f(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin(1/x) - \cos(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(0, 1]$,[1] φραγμένη στην κλειστότητά του, δηλ. στο διάστημα $[0, 1]$.
Μια ακόμη πιο 'παθολογική' συνάρτηση, είναι η συνάρτηση του Dirichlet:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Για να υπερπηδήσουμε (έστω προσωρινά) τέτοιες δυσκολίες έτσι ώστε να μπορέσουμε να δώσουμε (γεωμετρική) ερμηνεία του ολοκληρώματος 'ως εμβαδόν κάτω από το γράφημα συνάρτησης', θα πρέπει να περιοριστούμε σε ενα αρκετά 'καλό' σύνολο συναρτήσεων, π.χ. στο

$$C([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ συνεχής}\}.$$

Τότε, η ύπαρξη και διαδικασία εύρεσης παράγουσας αποκτά νόημα, με το συνδετικό κρίκο να είναι το 1ο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού. Ιδιαίτερα, στην περίπτωση συνάρτησης με συνεχή (πρώτη) παράγωγο[2], τα πράγματα απλοποιούνται ακόμη πιο πολύ.

Ιστορικά, πρώτα από τον Cauchy και αργότερα από το μαθητή του Gauss, τον Bernhard Riemann, η διαδικασία της ολοκλήρωσης διαχωρίστηκε πλήρως από την έννοια της διαφόρισης. Αργότερα, καθόσον η έννοια της συνάρτησης επιδεχόταν πιο 'αυστηρής ερμηνείας' επήλθε η ανάγκη ολοκλήρωσης γενικότερων κλάσεων συναρτήσεων.[3] Εδω θα περιοριστούμε στην ειδική περίπτωση συναρτήσεων της κλάσεως $C([a, b])$ αφού αποτελεί έναν πολύ παιδαγωγικό τρόπο ορισμού ολοκληρώματος και ως συνέπειες έχουμε μια πληθώρα εφαρμογών. Διαφορετικός τρόπος ορισμού του ολοκληρώματος Riemann γίνεται σε πιο προχωρημένο μάθημα Ανάλυσης.

[1] Η μόνη ασυνέχεια παρουσιάζεται στο σημείο $x = 0$.
[2] $C^1(\mathbb{I})$
[3] Η δουλειά του Fourier έδωσε σημαντική ώθηση προς την κατεύθυνση αυτή.

2.1 Ορισμός (Διαμέριση κλειστού διαστήματος)

Διαμέριση του διαστήματος $I = [a, b]$ **μεγέθους** n λέγεται οποιαδήποτε διατεταγμένη n-άδα $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Τα κλειστά υποδιαστήματα του I που αντιστοιχούν σε μια διαμέριση $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ είναι τα $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in 1, 2, \ldots, n$ και καλούνται **η διαμέριση του** I. **Πλάτος** του διαστήματος $[x_{i-1}, x_i]$ καλείται η ποσότητα $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$. Τέλος, το σύνολο όλων των διαμερίσεων του $I = [a, b]$ συμβολίζεται με $P([a, b])$.[α´]

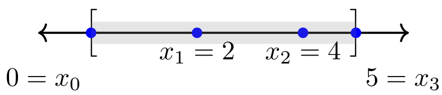
[α´] Ο όρος 'διαμέριση' χρησιμοποιείται εναλλάξ είτε για να δηλώσουμε το σύνολο των σημείων που αποτελούν τη διαμέριση είτε για τη διαμέριση αυτή καθε αυτή.

▶ **Παρατήρηση 2.2.1.** *Αξίζει να σημειώσουμε ότι*

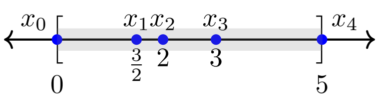
$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a.$$

Παραδείγματα 2.2.1.

(i) Μια διαμέριση του διαστήματος $[0, 5]$ μεγέθους $n = 4$, είναι η $P = \{0, 2, 4, 5\}$. η οποία το διαμερίζει στα υποδιαστήματα $[0, 2]$, $[2, 4]$ και $[4, 5]$.

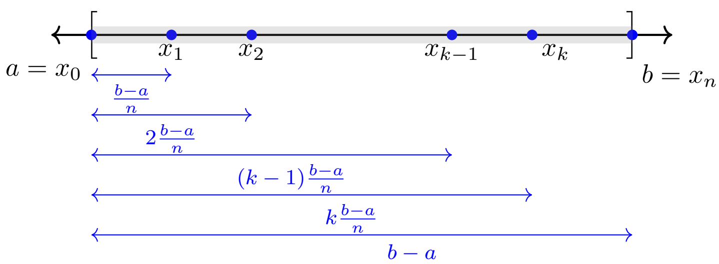


Μια άλλη διαμέρισή του μεγέθους $n = 4$, είναι η $Q = \{0, 3/2, 2, 3, 5\}$ η οποία το διαμερίζει στα υποδιαστήματα $[0, 1]$, $[3/2, 2]$, $[2, 3]$ και $[3, 5]$. Σε κάθε μια από τις πιο πάνω διαμερίσεις, τα πλάτη των υποδιαστημάτων είναι διαφορετικά.



(ii) **Η ομοιόμορφη διαμέριση** μεγέθους n ενός διαστήματος $[a, b]$.
Θέλουμε να τοποθετήσουμε $n-1$ σημεία x_i μεταξύ των a και b έτσι ώστε $x_0 = a$, $x_n = b$ και η απόσταση Δ_k μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων x_k και x_{k+1} να είναι ίδια $(:= \Delta_n)$. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\boxed{\Delta_n = \frac{b-a}{n}} \quad \text{και} \quad \boxed{x_i = a + i\Delta_n = a + i\frac{b-a}{n}}\ , \ i \in \{0, 1, \ldots, n\}\ . \tag{2.1}$$



Για παράδειγμα, η ομοιόμορφη διαμέριση μεγέθους $n = 7$ του διαστήματος $[-2, 5]$ είναι η

$$P = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

η οποία το διαμερίζει στα 7 υποδιαστήματα $[-2, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$ και $[4, 5]$, κάθε ένα από τα οποία έχει πλάτος 1 μονάδα, αφού $\Delta_7 = \frac{5-(-2)}{7} = 1$.

2.2 Ορισμός (Ορισμένο Ολοκλήρωμα)

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ μια συνεχής συνάρτηση.
Έστω $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ η ομοιόμορφη διαμέριση του $[a, b]$ μεγέθους n. Για κάθε επιλογή $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ορίζουμε ως το **Ορισμένο Ολοκλήρωμα της f (στο $[a, b]$)** το όριο

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta_n, \tag{2.2}$$

το οποίο συμβολίζεται με $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

▶ **Παρατηρήσεις 2.2.1.**

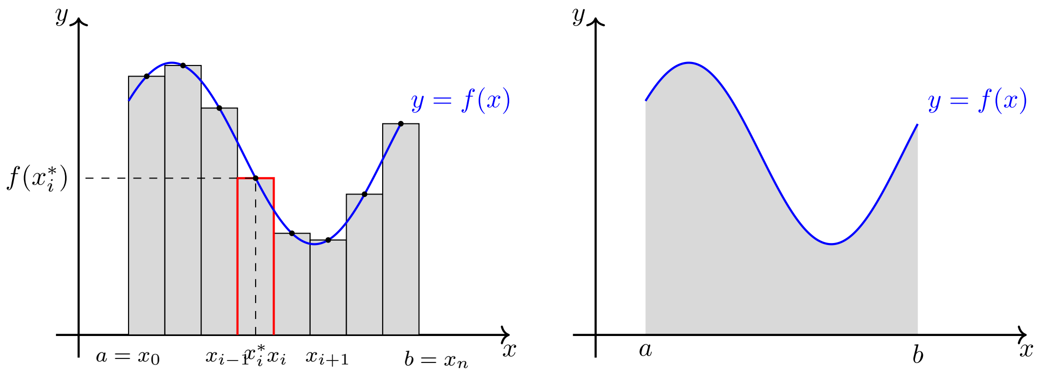
(i) Το πιο πάνω όριο είναι καλά ορισμένο (υπάρχει) λόγω της υπόθεσης της συνέχειας της συνάρτησης f στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και δίνει πάντα την ίδια τιμή άσχετα με την εκάστοτε επιλογή του $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(ii) Σύμφωνα με τον ορισμό του ορίου συνάρτησης, είναι $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta_n$ αν και μόνο αν $\forall \epsilon > 0$ $\exists N \equiv N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta_n \right| < \epsilon,$$

$\forall n \geq N$ και $\forall x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$.

(iii) Αν λοιπόν $f \geq 0$ στο διάστημα $[a, b]$, τότε το άθροισμα στην (2.2) εκφράζει το άθροισμα των στοιχειωδών ορθογωνίων στο εν λόγω διάστημα και αναπαριστά κατα προσέγγιση το εμβαδόν κάτω από το γράφημα της συνάρτησης f. Το δε όριο (υποθέτωντας τη συνέχεια της συνάρτησης) είναι ακριβώς το εμβαδόν κάτω από το γράφημα της συνάρτησης f.



$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta_n \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta_n = \int_a^b f(x)\,dx$$

Στο συμβολισμό $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, η f καλείται η **υπο ολοκλήρωση συνάρτηση**, το a το **κάτω όριο (άκρο)** της ολοκλήρωσης και το b το **ανω όριο (άκρο)** της ολοκλήρωσης. Η διαδικασία εύρεσης του (αριθμού) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ λέγεται **ολοκλήρωση** (της f στο $[a, b]$).

► **Παρατήρηση 2.2.2.** *Δεν έχει σημασία το σύμβολο που επιλέγουμε για τη μεταβλητή στο ολοκλήρωμα:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \equiv \int_a^b f(t)\,dt \equiv \int_a^b f(u)\,du$$

κ.ο.κ.. Αυτό είναι πολύ σημαντικό για τον υπολογισμό, μέσω αντικατάστασης, Ορισμένων ολοκληρωμάτων στα οποία η προς ολοκλήρωση συνάρτηση παρουσιάζει κάποιας μορφής συμμετρία, όπως θα δούμε σε επόμενη παράγραφο.

Παραδείγματα 2.2.2.

(i) Έστω η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = x\ln(1+x^4), \quad x \in [2,8].$$

Η f είναι συνεχής και αρα έχει νόημα το ολοκλήρωμα Riemann αυτής στο διάστημα $[2,8]$. Θεωρούμε την (ομοιόμορφη) διαμέριση μεγέθους n του διαστήματος $[2,8]$,

$$x_0 = 2, \quad \Delta_n = \frac{8-2}{n} = \frac{6}{n},$$

δηλ.

$$x_i = 2 + i\cdot\Delta_n = 2 + i\cdot\frac{6}{n}, \quad \forall k \in \{0,1,2,\ldots,n\}.$$

Τότε

$$\begin{aligned}\int_2^8 f(x)\,dx &= \int_2^8 x\ln(1+x^4)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\cdot\Delta_n \\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n x_i^*\ln(1+(x_i^*)^4)\cdot\frac{6}{n} \\ &= 6\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\cdot\left(2+\frac{6i}{n}\right)\cdot\ln\left[1+\left(2+\frac{6i}{n}\right)^4\right]\end{aligned}$$

(ii) Έστω η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad x \in [2,10].$$

Θεωρούμε την (ομοιόμορφη) διαμέριση μεγέθους n του διαστήματος $[2,10]$,

$$x_0 = 2, \quad \Delta_n = \frac{10-2}{n} = \frac{8}{n},$$

δηλ.

$$x_i = 2 + i\cdot\Delta_n = 2 + i\cdot\frac{8}{n}, \quad \forall k \in \{0,1,2,\ldots,n\}.$$

Τότε

$$\begin{aligned}\int_2^{10} f(x)\,dx &= \int_2^{10}\frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\cdot\Delta_n \\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n \frac{x_i^*}{1+(x_i^*)^2}\cdot\frac{8}{n} = 8\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n \frac{2+\frac{8i}{n}}{1+\left(2+\frac{8i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n} \\ &= 8\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n \frac{n^2(2n+8i)}{n^2+(2n+8i)^2}.\end{aligned}$$

Τα όρια στα προηγούμενα δύο παραδείγματα φαίνονται τρομακτικά, αφού περιέχουν άθροισμα! Από μόνα τους όμως τα αθροίσματα, για κατάλληλα μεγάλη τιμή του n αποτελούν μια ικανοποιητική προσέγγιση του ολοκληρώματος. Σε ειδικές όμως περιπτώσεις, το όριο υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψιν γνωστά σε μας αθροίσματα:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (2.3) \qquad\qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (2.4)$$

και

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \qquad (2.5)$$

Παραδείγματα 2.2.3.

(i) Θα δείξουμε ότι

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2},$$

όπου $a < b$.

Κατ' αρχάς, η συνάρτηση $f(x) = x,\ x \in [a,b]$ είναι συνεχής και αρα (κατα Riemann) ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε την ομοιόμορφη διαμέριση μεγέθους n του διαστήματος $[a,b]$: $\quad \Delta_n = \frac{b-a}{n}$. Τότε

$$x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}, \quad i \in \{0,1,\ldots,n\}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b x\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta_n \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^* \cdot \Delta_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n} \\
&= (b-a) \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right) \\
&= (b-a) \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a}{n} + \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} i\right) \\
&\overset{(2.3)}{=} (b-a) \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{an}{n} + \frac{b-a}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= (b-a) \lim_{n\to+\infty} \left(a + \frac{b-a}{2} \cdot \frac{n+1}{n}\right) \\
&= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{b^2-a^2}{2}.
\end{aligned}$$

Μπορείτε να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία του πιο πάνω αποτελέσματος λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{1}{2}(g(b) - g(a))$, όπου $g(x) = x^2$;

(ii) Θα δείξουμε ότι

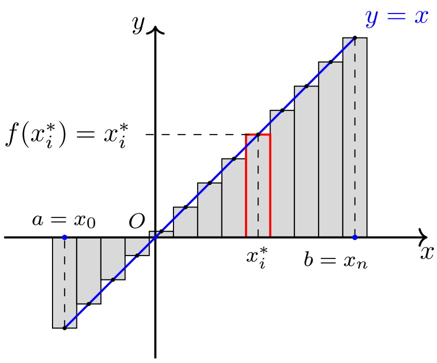
$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

Κατ' αρχάς, η συνάρτηση $f(x) = x^2,\ x \in [0,1]$ είναι συνεχής και αρα (κατα Riemann) ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε την ομοιόμορφη διαμέριση μεγέθους n του διαστήματος $[0,1]:\ \Delta_n = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$. Το κάθε x_i δίνεται από

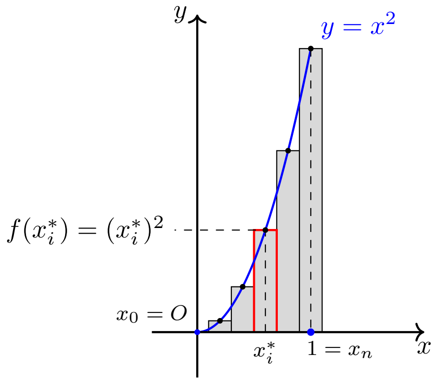
$$x_i = 0 + i \cdot \frac{1}{n} = \frac{i}{n}, \quad i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta_n \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^*)^2 \cdot \Delta_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \overset{(2.4)}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$



$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$



$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

2.2.1 Βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann

Η γραμμικότητα του αθροίσματος και του ορίου, βασικές ανισότητες και το Θεώρημα Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής (Θεώρημα (2.1.2)), μας επιτρέπουν εύκολα να αποδείξουμε τις πιο κάτω χρήσιμες ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann:

Πρόταση 2.2.1. *(Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann)*

Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ συνεχείς συναρτήσεις και $c \in \mathbb{R}$. Τότε

(i) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ **(ii)** $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

(iii) $\displaystyle\int_a^a [f(x) \pm c g(x)]\,dx = \int_b^a f(x)\,dx \pm c \int_b^a g(x)\,dx$

(iv) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^b f(x)\,dx$, όπου $\gamma \in \mathbb{R}$.

(v) $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

(vi) Αν $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a,b]$, τότε $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$

(vii) Αν $f(x) \geq g(x),\ \forall x \in [a,b]$, τότε $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$

(viii) Είναι

$$\min_{x\in[a,b]} f(x)\cdot(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \max_{x\in[a,b]} f(x)\cdot(b-a).$$

(ix) Είναι

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Απόδειξη. Η διαμέριση που χρησιμοποιείται στις αποδείξεις είναι η ομοιόμορφη διαμέριση μεγέθους n του διαστήματος $[a,b]$ ((2.1)) εκτός και αν αναφερθεί κάτι άλλο.

(i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\cdot\Delta_n = \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\cdot\frac{b-a}{n} = \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\cdot\frac{-(a-b)}{n} = -\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\cdot\frac{a-b}{n}$$

και αρα

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\cdot\Delta_n &= -\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\cdot\frac{a-b}{n}\\ &= -\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\cdot\tilde{\Delta}_n,\end{aligned}$$

όπου $\tilde{\Delta}_n$ η ομοιόμορφη διαμέριση του διαστήματος $[a,b]$ κατά την αντίθετη φορά, δηλ.

$$\tilde{\Delta}_n = \frac{a-b}{n} \quad \text{και} \quad x_i = b + i\tilde{\Delta}_n = b + i\frac{a-b}{n}\ ,\ i \in \{0,1,\ldots,n\}\ .$$

Άρα,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

(ii)

$$\int_a^a f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\cdot\Delta_n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n f(a)\cdot 0 = 0.$$

(iii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^n [g(x_i^*) \pm cf(x_i^*)]\cdot\Delta_n = \sum_{i=1}^n g(x_i^*)\cdot\Delta_n \pm c\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\cdot\Delta_n$$

και λαμβάνοντας όριο $n \to +\infty$, έχουμε το συμπέρασμα.

(iv) Υποθέτουμε πρώτα ότι $a < \gamma < b.$. Το ζητούμενο προκύπτει εύκολα θεωρώντας τις ομοιόμορφες διαμερίσεις των διαστημάτων $[a, \gamma]$ και $[\gamma, b]$. Αν τώρα $\gamma \notin (a, b)$,, π.χ. $\gamma > b(> a)$, τότε από την προηγούμενη ιδιότητα έχουμε

$$\int_a^\gamma f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^\gamma f(x)\,dx$$

και αρα

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\gamma f(x)\,dx - \int_b^\gamma f(x)\,dx.$$

Αλλά, από το (i),

$$-\int_b^\gamma f(x)\,dx = -\int_\gamma^b f(x)\,dx$$

και το συμπέρασμα έπεται. Ομοίως και η περίπτωση που $\gamma < a(< b)$.

(v) Προκύπτει άμεσα από το (ii) για $f \equiv 0$ και $g \equiv 1$. Διαφορετικά, με τον ορισμό:

$$\begin{aligned}\int_a^b c\,dx &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta_n \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n c \cdot \frac{b-a}{n} \\ &= c \cdot \frac{b-a}{n} \cdot n = c(b-a).\end{aligned}$$

(vi) Σε κάθε διάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ (της διαμέρισης) είναι $f(x) \geq 0$. Έτσι, αν $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ για κάποιο i, τότε $f(x_i^*) \geq 0 \Rightarrow f(x_i^*) \cdot \Delta_n \geq 0,\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Άρα,

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta_n \geq 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta_n \geq 0,$$

δηλ. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

(vii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h = g - f$. Από υπόθεση, $0 \leq h(x),\ \forall \in [a, b]$ και αρα, από το προηγούμενο, $\displaystyle\int_a^b h(x)\,dx \geq 0$, δηλ. $\displaystyle\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx \geq 0$. Αλλά, από το (i), $\displaystyle\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$ και το συμπέρασμα έπεται.

(viii) Από το Θεώρημα Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής (Θεώρημα (2.1.2)), η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $[a, b]$:

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) \leq f(x) \leq \max_{x\in[a,b]} f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Τότε, από το προηγούμενο,

$$\int_a^b \min_{x\in[a,b]} f(x)\,dx \leq f(x) \leq \int_a^b \max_{x\in[a,b]} f(x)\,dx,$$

δηλ.

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) \int_a^b dx \leq f(x) \leq \max_{x\in[a,b]} f(x) \int_a^b dx,$$

δηλ.

$$\min_{x\in[a,b]} f(x)\cdot(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \max_{x\in[a,b]} f(x)\cdot(b-a).$$

(ix) Αρκεί ισοδύναμα να δείξουμε ότι

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Αυτό όμως έπεται αμέσως από την ιδιότητα της απόλυτης τιμής ($-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, $\forall x \in [a,b]$) και το (vii).

□

Παραδείγματα 2.2.4.

(1) Έστω $f, g : [-2,7] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $\displaystyle\int_{-2}^{7} f(x)\,dx = 4$ και $\displaystyle\int_{-2}^{7} g(x)\,dx = -3$. Να υπολογιστούν τα

$$\int_7^{-2} f(x)\,dx \qquad \text{και} \qquad \int_{-2}^{7} [5f(x) - 6g(x)]\,dx.$$

Απάντηση

$$\int_7^{-2} f(x)\,dx = -\int_{-2}^{7} f(x)\,dx = -4$$

και

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{7} [5f(x) - 6g(x)]\,dx &= 5\int_{-2}^{7} f(x)\,dx - 6\int_{-2}^{7} g(x)\,dx \\ &= 5\cdot 4 - 6\cdot(-3) = 38. \end{aligned}$$

(2) Έστω $f : [0,8] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx = 5$, $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,dx = 7$ και $\displaystyle\int_0^8 f(x)\,dx = 9$. Να υπολογιστούν τα

(i) $\displaystyle\int_8^0 f(x)\,dx$ **(ii)** $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$ **(iii)** $\displaystyle\int_8^2 \frac{1}{3} f(x)\,dx$

Απάντηση

(i) $\displaystyle\int_8^0 f(x)\,dx = -\int_0^8 f(x)\,dx = -5.$

(ii) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^4 f(x)\,dx - \int_2^4 f(x)\,dx = 5 - 7 = -2.$

(iii) $\displaystyle\int_8^2 \frac{1}{3} f(x)\,dx = -\frac{1}{3}\int_2^8 f(x)\,dx = -\frac{1}{3}\left(\int_0^8 f(x)\,dx - \int_0^2 f(x)\,dx\right) = -\frac{1}{3}[9-(-2)]$
$= -\frac{11}{3}.$

(3) Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει

$$\int_1^a \frac{x(x+3)}{x^2-x+2}\,dx - 2\int_1^a \frac{1-2x}{x^2-x+2}\,dx = 4.$$

Απάντηση

$$\int_1^a \frac{x(x+3)}{x^2-x+2}\,dx - 2\int_1^a \frac{1-2x}{x^2-x+2}\,dx = 4 \Leftrightarrow \int_1^a \frac{x(x+3)}{x^2-x+2}\,dx - \int_1^a \frac{2(1-2x)}{x^2-x+2}\,dx = 4$$

$$\Leftrightarrow \int_1^a \left(\frac{x(x+3)}{x^2-x+2} - \frac{2(1-2x)}{x^2-x+2}\right)dx = 4 \Leftrightarrow \int_1^a \frac{x(x+3)-2(1-2x)}{x^2-x+2}\,dx = 4$$

$$\Leftrightarrow \int_1^a \frac{x^2-x+2}{x^2-x+2}\,dx = 4 \Leftrightarrow \int_1^a dx = 4 \Leftrightarrow a-1=4 \Leftrightarrow \boxed{a=5}\,.$$

(4) Να δειχθεί ότι

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \le \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx.$$

Απάντηση

Πράγματι, $\forall x \in [0,1]$,

$$x^2 \le x \Rightarrow 1+x^2 \le x+1 \Rightarrow \sqrt{1+x^2} \le \sqrt{1+x}$$

και αρα (Ιδιότητα (vii))

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \le \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx.$$

(5) Να δειχθεί ότι

$$1 \le \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \le \sqrt{2}.$$

Απάντηση

Πράγματι, $\forall x \in [-1,1]$,

$$0 \le x^2 \le 1 \Rightarrow 1 \le 1+x^2 \le 1+1=2 \Rightarrow 1 \le x^2 \le \sqrt{2}$$

και αρα (Ιδιότητα (vii))

$$\int_{-1}^1 dx \le \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \le \int_{-1}^1 \sqrt{2}\,dx,$$

δηλ. (Ιδιότητα (i))

$$2 \le \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \le 2\sqrt{2},$$

δηλ.

$$1 \le \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \le \sqrt{2}.$$

Η επόμενη Πρόταση είναι ιδιαίτερα σημαντική και αντανακλά τη σημασία της συνέχειας της υπο ολοκλήρωση συνάρτησης:

Πρόταση 2.2.2.

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a,b]$. Τότε,

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \Longleftrightarrow f \equiv 0.$$

Απόδειξη.
($\Longrightarrow$) Υποθέτουμε ότι $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ και έστω ότι υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) > 0$. Έστω $\epsilon > 0$. Λόγω της συνέχειας της f στο x_0, θα υπάρχει μια $\delta-$(ανοικτή) περιοχή $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ του σημείου αυτού έτσι ώστε για ολα τα x στην περιοχή αυτή, $f(x) \in (f(x_0)-\epsilon, f(x_0)+\epsilon)$, δηλ.

$$x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \ \Rightarrow\ f(x_0)-\epsilon < f(x) < f(x_0)+\epsilon.$$

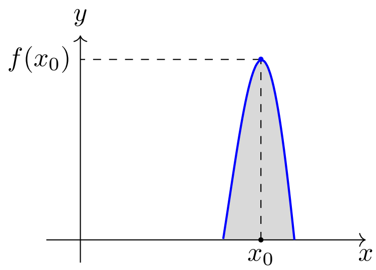
Ιδιαίτερα, για το $\epsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$,

$$x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \ \Rightarrow\ \frac{f(x_0)}{2}n < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2}.$$

Τότε, (Ιδιότητα (vii))

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx &> \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2}\,dx = \frac{f(x_0)}{2}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} dx \\ &= 2\delta\frac{f(x_0)}{2} = \delta f(x_0) > 0,\end{aligned}$$

άτοπο.
($\Longleftarrow$) Αν $f \equiv 0$, τότε προφανώς $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. $\square$



Σχήμα 2.5: Πρόταση (2.2.2). Αν υπάρχει (τουλάχιστον ενα) x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0) > 0$, τότε σε μια ανοικτή περιοχή του σημείου αυτού, το γράφημα της συνάρτησης θα περικλείει εμβαδόν (με τον άξονα των τετμημένων).

Εφαρμογές

(i) Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) \geq g(x),\ \forall x \in [a,b]$ και $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$. Τότε, $f \equiv g$. Αυτό είναι άμεσο από την προηγούμενη Πρόταση (την οποία εφαρμόζουμε στη συνάρτηση $h := f - g$).

(ii) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\displaystyle\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = 0$ για **κάθε** συνεχή συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Τότε $f \equiv 0$.

Πράγματι, από την υπόθεση για $g = f$, έχουμε ότι $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$ και αρα, αφού $f^2 \geq 0$, από την προηγούμενη Πρόταση έπεται ότι $f^2 \equiv 0$ και έχουμε το συμπέρασμα.

(iii) Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$. Τότε, υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση $h = f - g$. Αν $h(x) \neq 0,\ \forall x \in (a, b)$, τότε από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, λόγω της συνέχειας της h, είναι είτε $h > 0$ είτε $h < 0$ (στο (a, b)). Σε κάθε περίπτωση, από την προηγούμενη Πρόταση, θα έχουμε $\displaystyle\int_a^b h(x)\,dx \neq 0$, δηλ. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \neq \int_a^b g(x)\,dx$, άτοπο.

(iv) Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1/2.$. Τότε, η f έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου, δηλ. υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $f(x) > x,\ \forall x \in (0, 1)$. Τότε από την προηγούμενη Πρόταση, $\displaystyle\int_0^1 [f(x) - x]\,dx > 0$. Αλλά $\displaystyle\int_0^1 [f(x) - x]\,dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx > \int_0^1 x\,dx = 1/2,$[4] άτοπο. Ομοίως για $f(x) < x,\ \forall x \in (0, 1)$. Συνεπώς, $\displaystyle\int_0^1 f(x) = 1/2 \Leftrightarrow$ υπάρχουν $\xi_1,\ \xi_2 \in (0, 1)$ τέτοιοι ώστε $f(\xi_1) \geq \xi_1$ και $f(\xi_2) \leq \xi_2$. Αν $f(\xi_1) = \xi_1$ ή αν $f(\xi_2) = \xi_2$, τότε το ζητούμενο αποδείχθηκε. Στην αντίθετη περίπτωση, θεωρούμε τη συνάρτηση $x \mapsto f(x) - x$ για την οποία ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Bolzano: $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$.

(v) Δεν υπάρχει συνεχής και θετική συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1, \quad \int_0^1 xf(x)\,dx = a \quad \text{και} \quad \int_0^1 x^2 f(x)\,dx = a^2,$$

όπου $a \in (0, 1)$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι υπάρχει τέτοια συνάρτηση f. Τότε,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x-a)^2 f(x)\,dx &= \int_0^1 (x^2 - 2ax + a^2) f(x)\,dx \\
&= \int_0^1 x^2 f(x)\,dx - 2a\int_0^1 xf(x)\,dx + a^2\int_0^1 f(x)\,dx \\
&= a^2 - 2a^2 + a^2 \ = \ 0.
\end{aligned}$$

Αλλά, $(x - a)^2 f(x) \geq 0,\ \forall x \in [0, 1]$ και αρα, σε συνδυασμό με την πιο πάνω σχέση, η προηγούμενη Πρόταση δίνει ότι $(x-a)^2 f(x) = 0,\ \forall x \in [0, 1]$ και αρα $f(x) = 0\ \forall x \in [0, 1]\backslash\{a\}$. Όμως, λόγω της συνέχειας της f, είναι $f(a) = 0$. Έτσι, $f(x) = 0\ \forall x \in [0, 1]$ και αρα $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, άτοπο, αφού $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1$.

[4] Δες Παραδείγματα (2.2.3)(i)