Η αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού
και
τα ανταλλάξιμα ενδεχόμενα

1.2 Η αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού

Αν A και B δύο οποιαδήποτε πεπερασμένα υποσύνολα του συνόλου Ω, τότε

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B). \tag{1.2}$$

Αυτό προκύπτει εύκολα αφού κατά τον υπολογισμό του πληθάριθμου του συνόλου $A \cup B$ προσμετρήθηκε δύο φορές ο πληθάριθμος της τομής $A \cap B$.

Έπεται άμεσα με χρήση του κανόνα του de Morgan $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$, ότι

$$N(A^c \cap B^c) = N(\Omega) - (N(A) + N(B) - N(A \cap B)).$$

Το επόμενο Θεώρημα γενικεύει τον τύπο (1.2).

Θεώρημα 1.2.1 (Αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού)**.**
Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_n$ υποσύνολα του Ω. Τότε,

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_s \le n} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_s}). \tag{1.3}$$

► **Παρατήρηση 1.2.1.**

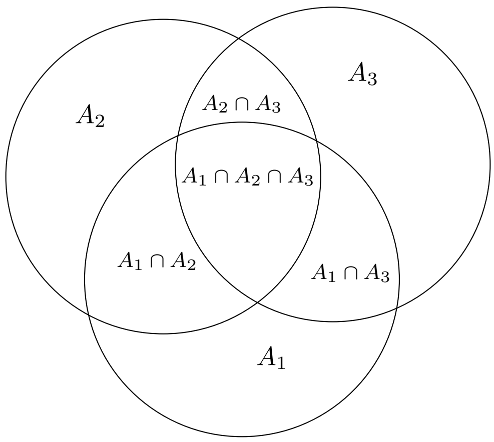
(i) *Δηλαδή η άθροιση στο τελευταίο άθροισμα στο δεξί μέλος της (1.3) λαμβάνει χώραν στο σύνολο όλων των συνδυασμών $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ των n το πλήθος δεικτών $\{1, 2, \ldots, n\}$ ανα k.*
Τα αθροίσματα αυτά συμβολίζονται με $S_{n,s}$:

$$S_{n,s} = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_s \le n} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_s}).$$

Παρατηρήστε ότι $S_{n,0} = \Omega$.

(ii) *Για $n = 2$ έχουμε τον τύπο (1.2) και για $n = 3$ ο (1.3) γράφεται*

$$\begin{aligned} N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) - N(A_1 \cap A_2) - N(A_1 \cap A_3) - N(A_2 \cap A_3) \\ &\quad + N(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$



(iii) *Για το ενδεχόμενο $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$, έχουμε*

$$\begin{aligned} N(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) &= N(\Omega) - N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \\ &= S_{n,0} - \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s-1} S_{n,s} \\ &= \sum_{s=0}^{n} (-1)^{s} S_{n,s}. \end{aligned}$$

Ορισμός 1.2.1. *Έστω A_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ μη κενά υποσύνολα ενός συνόλου Ω. Αν για κάθε επιλογή δεικτών $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ από τους $\{1, 2, \ldots, n\}$, ο πληθάριθμος $N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_s})$ εξαρτάται από το s (και όχι από την επιλογή των δεικτών), δηλαδή αν*

$$N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_s}) = n_s, \quad s \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

τότε τα ενδεχόμενα καλούνται ***ανταλλάξιμα****.*

Για τα ανταλλάξιμα ενδεχόμενα, είναι εύκολο να απαριθμήσουμε τον πληθάριθμο της ένωσής τους (άρα και της τομής τους):

Θεώρημα 1.2.2. *Έστω A_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ μη κενά ανταλλάξιμα υποσύνολα ενός συνόλου Ω. Τότε,*

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s-1} \binom{n}{s} n_s,$$

όπου

$$n_s = N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_s}).$$

Απόδειξη. Αφού τα ενδεχόμενα είναι ανταλλάξιμα, για κάθε επιλογή δεικτών $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ από τους $\{1, 2, \ldots, n\}$,

$$N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_s}) = n_s$$

και αρα

$$S_{n,s} = \binom{n}{s} n_s, \quad s \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Το αποτέλεσμα έπεται από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού. □

Πόρισμα 1.2.1. *Έστω A_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ μη κενά ανταλλάξιμα υποσύνολα ενός συνόλου Ω. Τότε,*

$$N(A_{i_1}^c \cap A_{i_2}^c \cap \ldots \cap A_{i_s}^c) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} n_k,$$

όπου

$$n_0 \equiv N(\Omega), \quad n_k := N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_s}).$$

▶ **Παράδειγμα 1.2.1.** *Οι τελειόφοιτοι ενός Λυκείου έδωσαν μια δοκιμαστική εξέταση στο μάθημα των Μαθηματικών, της φυσικής Ελληνικών και των Νέων Ελληνικών.*
Αν είναι γνωστό ότι ο αριθμός των μαθητών που πέρασαν στο μάθυμα της Φυσικής είναι διπλάσιος του αριθμού των επιτυχόντων στα Μαθηματικά, ο αριθμός των επιτυχόντων στα Νέα Ελληνικά είναι τριπλάσιος από τον αριθμό των επιτυχόντων στα Μαθηματικά, ο αριθμός των επιτυχόντων στα Μαθηματικά και Φυσική είναι ο ίδιος με τον αριθμό των επιτυχόντων στη Φυσική και στα Νέα Ελληνικά, 4 μαθητές πέρασαν και στα 3 μαθήματα, πέντε πέρασαν στα Μαθηματικά και απέτυχαν στη Φυσική και 52 πέτυχαν σε ενα τουλάχιστον μάθημα.

Να βρεθεί ο αριθμός των μαθητών που πέρασαν στα Μαθηματικά και ο αριθμός των μαθητών που πέρασαν στα Μαθηματικά και στη Φυσική.

Απάντηση. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned} A &= \{\text{επιτυχόντες στα Μαθηματικά}\} \\ B &= \{\text{επιτυχόντες στη Φυσική}\} \\ C &= \{\text{επιτυχόντες στα Νέα Ελληνικά}\}. \end{aligned}$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε:

$$2N(A) = N(B), \quad N(C) = 3N(A), \quad N(A \cap B) = N(A \cap C) = N(B \cap C),$$

$$N(A \cup B \cup C) = 52, \quad N(A \cap B \cap C) = 4, \quad N(A \cap B') = 5.$$

Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε:

$$2N(A) = N(B), \quad N(C) = 3N(A), \quad N(A \cap B) = N(A \cap C) = N(B \cap C),$$

$$N(A \cup B \cup C) = 52, \quad N(A \cap B \cap C) = 4, \quad N(A \cap B') = 5.$$

Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού,

$$N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 52 = N(A) + 2N(A) + 3N(A) - 3N(A \cap B) + 4 \\
&\Rightarrow 48 = 6N(A) - 3N(A \cap B) \\
&\Rightarrow 16 = 2N(A) - N(A \cap B) \\
&\Rightarrow N(A \cap B) = 2N(A) - 16.
\end{aligned}$$

Τότε

$$N(A) = N(A \cap B) + \underbrace{N(A \setminus B)}_{=N(A \cap B^c)} = 2N(A) - 16 + 5$$

$$\Rightarrow \boxed{N(A) = 11}.$$

Επίσης,

$$\boxed{N(A \cap B) = 2N(A) - 16 = 22 - 16 = 6}.$$

▶ **Παράδειγμα 1.2.2.** [*Θέμα 3 του μαθήματος 'Συνδυαστική Ι' (Νοέμβριος 2003) του Τμήματος Μαθηματικών (ΕΚΠΑ)*]

Επαναλαμβάνουμε 20 φορές την εξής διαδικασία: Εξάγουμε ένα τραπουλόχαρτο από μια τράπουλα (αποτελούμενη από 52 διακεκριμένα τραπουλόχαρτα), το καταγράφουμε, και το επανατοποθετούμε στην τράπουλα (σε τυχαία θέση). Στο τέλος των 20 επαναλήψεων, το αποτέλεσμα θα είναι μια διατεταγμένη εικοσάδα από τραπουλόχαρτα (όχι κατ' ανάγκη διαφορετικά). Έστω T το πλήθος όλων των εικοσάδων, σε καθεμιά από τις οποίες εμφανίζονται και οι τέσσερεις άσσοι ης τράπουλας. Αποδείξτε ότι:

$$T = \sum_{s=0}^{4} (-1)^s \binom{4}{s} (52 - s)^{20}.$$

Απάντηση. Έστω Ω το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος (δειγματικός χώρος).

Είναι

$$\Omega = \{(i_1, i_2, \ldots, i_{20}) \ : \ i_1, i_2, \ldots, i_{20} \in \{1, 2, \ldots, 52\}\}.$$

Τότε, $N(\Omega) = 52^{20}$.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$A_i = \{\textbf{δεν} \text{ εμφανίζεται ο } i \text{ άσσος}\}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Τότε

$$A_i^c = \{\text{εμφανίζεται ο } i \text{ άσσος}\}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Έτσι,
$$T = N(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c).$$
Έχουμε
$$\begin{aligned} N(A_1) &= (52-1)^{20} = (51)^{20} = N(A_2) = N(A_3) = N(A_4) \\ N(A_{i_1} \cap A_{i_2}) &= (52-2)^{20}, \;\; 1 \le i_1 < i_2 \le 4 \\ N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) &= (52-3)^{20}, \;\; 1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le 4 \\ N(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= (52-4)^{20}, \end{aligned}$$
δηλαδή τα ενδεχόμενα A_i είναι **ανταλλάξιμα**. Άρα
$$\begin{aligned} S_{4,0} &= N(\Omega) \; = \; (52)^{20} \\ S_{4,1} &= \sum_{1 \le i \le 4} N(A_i) \; = \; (52-1)^{20} \cdot 4 \; = \; \binom{4}{1}(52-1)^{20} \\ S_{4,2} &= \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le 4} N(A_{i_1} \cap A_{i_2}) \; = \; \binom{4}{2}(52-2)^{20} \\ S_{4,3} &= \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le 4} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) \; = \; \binom{4}{3}(52-3)^{20} \\ S_{4,4} &= \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \le 4} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}) \; = \; \binom{4}{4}(52-4)^{20}. \end{aligned}$$
Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού,
$$\begin{aligned} T &= N(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c) \\ &= \sum_{s=0}^{4} (-1)^s S_{4,s} \\ &= \sum_{s=0}^{4} (-1)^s \binom{4}{s} (52-s)^{20}. \end{aligned}$$
□

▶ **Παράδειγμα 1.2.3.** [*Κατανομές διακεκριμένων σφαιριδίων σε κελιά*]
Έχουμε n κελιά και k διακεκριμένα σφαιρίδια (π.χ. είναι αριθμημένα κατά αύξουσα σειρά ή χρωματισμένα με διαφορετικό χρώμα), $k \ge n$. Να βρεθεί το πλήθος των διαφορετικών κατανομών των σφαιριδίων στα κελιά αν σε κάθε κελί πρέπει να τοποθετηθεί ***τουλάχιστον*** *ένα σφαιρίδιο.*

Απάντηση. Έστω Ω το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος (δειγματικός χώρος).
Έστω S το πλήθος των διαφορετικών κατανομών των σφαιριδίων στα κελιά αν σε κάθε κελί πρέπει να τοποθετηθεί **τουλάχιστον** ένα σφαιρίδιο.
Είναι
$$\Omega = \{(i_1, i_2, \ldots, i_k) \; : \; i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$
Τότε, $N(\Omega) = n^k$.
Θεωρούμε τα ενδεχόμενα
$$A_i = \{\text{το κελί } i \text{ μένει άδειο}\},$$
$i = 1, 2, \ldots, n$. Τότε
$$A_i^c = \{\text{το κελί } i \text{ περιέχει ένα τουλάχιστον σφαιρίδιο}\},$$

$i = 1, 2, \ldots, n$. Έτσι,

$$\begin{aligned} S &= N(A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_n^c) \\ &= N(\Omega) - N(A_1^c \cup A_2^c \cup \ldots \cup A_n^c) \\ &= n^k - \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s-1} S_{n,s}. \end{aligned}$$

Βρίσκουμε ότι

$$S_{n,s} = \binom{n}{s} (n-s)^k$$

και αρα

$$S = n^k - \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s-1} \binom{n}{s} (n-s)^k = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{n}{s} (n-s)^k.$$

□

► **Παράδειγμα 1.2.4.** *Ένα λεωφορείο ξεκινά από την αφετηρία του με k (προφανώς διακεκριμένους) επιβάτες οι οποίοι θα αποβιβαστούν σε n (διακεκριμένες) στάσεις. Με πόσους τρόπους μπορούν να αποβιβαστούν οι επιβάτες έτσι ώστε σε r προκαθορισμένες στάσεις να κατέβει ένας τουλάχιστον επιβάτης;*

Απάντηση. Έστω Ω το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος (δειγματικός χώρος). Είναι

$$\Omega = \{(i_1, i_2, \ldots, i_k) \ : \ i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

Τότε, $N(\Omega) = n^k$.
Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$A_i = \{\text{δεν κατεβαίνει επιβάτης στην } i \text{ στάση}\},$$

$i = 1, 2, \ldots, r$. Τότε

$$A_i^c = \{\text{κατεβαίνει ένας τουλάχιστον επιβάτης στην } i \text{ στάση}\},$$

$i = 1, 2, \ldots, r$. Τα ενδεχόμενα A_i είναι **ανταλλάξιμα**. Άρα

$$S_{r,s} = \binom{r}{s} (n-s)^k, \quad s = 1, 2, \ldots, r$$

και επίσης $S_{r,0} = N(\Omega) = n^k$. Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, το ζητούμενο πλήθος είναι ίσο με

$$S = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{r}{s} (n-s)^k.$$

□

Βιβλιογραφία-Αναφορές

[Χαρ] Χ. Χαραλαμπίδη, *Συνδυαστική*, Τεύχος 1, 2η Έκδοση, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2000