Δραστηριότητες σελ. 75 (Ενότητα 4.4: Ειδικά Αθροίσματα)

1. **(α)**

$$\sum_{k=1}^{\nu}\left(-\frac{1}{2}\right)^{\kappa}=-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{\nu}=\frac{-\frac{1}{2}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{\nu}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{\nu}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}S_\nu=-\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{\nu}\right)=-\mathbf{\frac{1}{3}}$$

και αρα η σειρά συγκλίνει (στον αριθμό $-\frac{1}{3}$)

(β) $\sum_{k=1}^{\infty}(3)^{\kappa}$ Υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα της σειράς:

$$S_\nu=\sum_{\kappa=1}^{\nu}(3)^{\kappa}=3+(3)^2+\cdots+(3)^{\nu}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}S_\nu=+\infty$$

και αρα η σειρά δε συγκλίνει.

(γ) Έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\nu}(3)^{-\kappa}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\kappa}=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^{2}+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{\nu}=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{\nu}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{\nu}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}S_\nu=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{\nu}\right)=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

και αρα η σειρά συγκλίνει (στον αριθμό $\frac{1}{2}$)

2. Έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\nu}\kappa(12\kappa+8)=\sum_{k=1}^{\nu}(12\kappa^2+8\kappa)=\sum_{k=1}^{\nu}(12\kappa^2)+\sum_{k=1}^{\nu}(8\kappa)=12\sum_{k=1}^{\nu}\kappa^2+8\sum_{k=1}^{\nu}\kappa$$

$$=12\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}+8\frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

$$=2\nu(\nu+1)\big((2\nu+1)+2\big)$$

$$=\mathbf{2\nu(\nu+1)(2\nu+3)}$$

3. **(α)** Είναι

$$\sum_{k=1}^{\nu}(\kappa+2)(\kappa+6)=\sum_{k=1}^{\nu}(\kappa^2+8\kappa+12)=\sum_{k=1}^{\nu}\kappa^2+8\sum_{k=1}^{\nu}\kappa+12\sum_{k=1}^{\nu}1$$

$$=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}+8\frac{\nu(\nu+1)}{2}+12\nu$$

$$=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}+4\nu(\nu+1)+12\nu$$

$$=\boldsymbol{\nu}\left[\mathbf{\frac{(\nu+1)(2\nu+1)}{6}+4(\nu+1)+12}\right]$$

(β) Είναι

$$\sum_{k=1}^{\nu}(4\kappa^3+6\kappa^2+2\kappa)=4\sum_{k=1}^{\nu}\kappa^3+6\sum_{k=1}^{\nu}\kappa^2+2\sum_{k=1}^{\nu}\kappa$$

$$=4\frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}+6\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}+2\frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

$$=\nu^2(\nu+1)^2+\nu(\nu+1)(2\nu+1)+\nu(\nu+1)$$

$$=\nu(\nu+1)[\nu(\nu+1)+2\nu+2]$$

$$=\boldsymbol{\nu(\nu+1)^2(\nu+2)}$$

(γ) Είναι

$$\sum_{k=1}^{\nu}\kappa(\kappa+1)\,(\kappa+3)=\sum_{k=1}^{\nu}(\kappa^3+4\kappa^2+3\kappa)=\sum_{k=1}^{\nu}\kappa^3+4\sum_{k=1}^{\nu}\kappa^2+3\sum_{k=1}^{\nu}\kappa$$

$$=\frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}+4\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}+3\frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

$$=\boldsymbol{\frac{\nu(\nu+1)}{2}\left[\frac{\nu(\nu+1)}{2}+4\frac{2\nu+1}{3}+3\right]}$$

4. **(α)**

$$2^3+4^3+6^3+8^3+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}(2\kappa)^3=\sum_{k=1}^{\infty}2^3\cdot\kappa^3=8\sum_{k=1}^{\infty}\kappa^3$$

και αρα

$$\boldsymbol{S_\nu=8\sum_{k=1}^{\nu}\kappa^3=8\frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}=2\nu^2(\nu+1)^2}$$

(β) $1\cdot1^2+2\cdot4^2+3\cdot7^2+4\cdot10^2+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\kappa(3\kappa-2)^2$

Πως το βρήκαμε:

Οι όροι $1,4,7,10,\cdots$ αποτελούν διαδοχικούς όρους Α.Π. $(\alpha_\kappa)_\kappa$ με σταθερή διαφορά $\delta=3$ και αρχικό όρο $\alpha_1=1$. Έτσι,

$$\alpha_\kappa=\alpha_1+(\kappa-1)\delta=1+(\kappa-1)3=3\kappa-2.$$

και αρα

$$S_\nu=\sum_{k=1}^{\nu}\kappa(3\kappa-2)^2=\sum_{k=1}^{\nu}\kappa(9\kappa^2-12\kappa+4)=\sum_{k=1}^{\nu}(9\kappa^3-12\kappa^2+4\kappa)$$

$$=9\sum_{k=1}^{\nu}\kappa^3-12\sum_{k=1}^{\nu}\kappa^2+4\sum_{k=1}^{\nu}\kappa$$

$$=9\frac{\kappa^2(\kappa+1)^2}{4}-12\frac{\kappa(\kappa+1)(2\kappa+1)}{6}+4\frac{\kappa(\kappa+1)}{2}$$

$$= 9\frac{\kappa^2(\kappa+1)^2}{4} - 2\kappa(\kappa+1)(2\kappa+1) + 2\kappa(\kappa+1)$$

$$= \kappa(\kappa+1)\left(9\frac{\kappa(\kappa+1)}{4} - 2(2\kappa+1) + 2\right)$$

(γ) $2\cdot 4 + 5\cdot 7 + 8\cdot 10 + 11\cdot 13 + \cdots = \sum_{\kappa=1}^{\infty}(3\kappa-1)(3\kappa+1) = \sum_{\kappa=1}^{\infty}(9\kappa^2-1)$

Πως το βρήκαμε:

Οι όροι $2,5,8,11,\cdots$ αποτελούν διαδοχικούς όρους Α.Π. $(\alpha_\kappa)_\kappa$ με σταθερή διαφορά $\delta = 3$ και αρχικό όρο $\alpha_1 = 2$. Έτσι,

$$\alpha_\kappa = \alpha_1 + (\kappa-1)2 = 2 + (\kappa-1)3 = 3\kappa - 1.$$

Οι όροι $4,7,10,13,\cdots$ αποτελούν διαδοχικούς όρους Α.Π. $(\alpha_\kappa)_\kappa$ με σταθερή διαφορά $\delta = 3$ και αρχικό όρο $\alpha_1 = 4$. Έτσι,

$$\alpha_\kappa = \alpha_1 + (\kappa-1)3 = 4 + (\kappa-1)3 = 3\kappa + 1.$$

και αρα

$$S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu}(9\kappa^2-1) = 9\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^2 - \sum_{\kappa=1}^{\nu}1 = 9\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} - \nu = \boldsymbol{\nu}\left[\mathbf{3}\frac{(\boldsymbol{\nu}+\mathbf{1})(\mathbf{2}\boldsymbol{\nu}+\mathbf{1})}{\mathbf{2}} + \mathbf{1}\right]$$

5. Είναι για $\nu \in \mathbb{N}$ σταθεροποιημένο,

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}(6\kappa^2+4\kappa-1) = 6\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^2 + 4\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa - \sum_{\kappa=1}^{\nu}1 = 6\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + 4\frac{\nu(\nu+1)}{2} - \nu$$

$$= \nu(\nu+1)(2\nu+1) + 2\nu(\nu+1) - \nu = \nu\big((\nu+1)(2\nu+1) + 2(\nu+1) - 1\big)$$

$$= \nu\big((\nu+1)(2\nu+1) + 2(\nu+1) - 1\big) = \nu(2\nu^2+3\nu+1) = \nu(\nu+1)\left(\nu - \frac{1}{2}\right)$$

Το πιο πάνω δίνει:

$$\sum_{\kappa=1}^{40}(6\kappa^2+4\kappa-1) = 40(40+1)\left(40-\frac{1}{2}\right) \quad \kappa\alpha\iota \quad \sum_{\kappa=1}^{20}(6\kappa^2+4\kappa-1) = 20(20+1)\left(20-\frac{1}{2}\right)$$

και αρα

$$\sum_{\kappa=21}^{40}(6\kappa^2+4\kappa-1) = \sum_{\kappa=1}^{40}(6\kappa^2+4\kappa-1) - \sum_{\kappa=1}^{20}(6\kappa^2+4\kappa-1)$$

$$= 40(40+1)\left(40-\frac{1}{2}\right) - 20(20+1)\left(20-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 118040$$