Δραστηριότητες σελ 67 (Ενότητα 4.2: Ιδιότητες του Σ-συμβολισμού)

1. (α) Έχουμε

$$\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}+\sqrt{8}+\sqrt{9}+\sqrt{10}+\sqrt{11}=\sum_{k=3}^{11}\sqrt{k}$$

(β) Έχουμε

$$2+1+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{5}+\frac{2}{6}+\frac{2}{7}=\frac{2}{1}+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{5}+\frac{2}{6}+\frac{2}{7}=\sum_{k=1}^{7}\frac{2}{i}=2\sum_{k=1}^{7}\frac{1}{i}$$

(γ) Έχουμε

$$2^2+5^2+8^2+11^2+\cdots+26^2+29^2=\sum_{k=1}^{10}(3k-1)^2$$

Πως το βρήκαμε:
Οι όροι $2,5,8,11,\cdots,26,29$ αποτελούν διαδοχικούς όρους Α.Π. $(\alpha_\kappa)_\kappa$ με σταθερή διαφορά $\delta=3$ και αρχικό όρο $\alpha_1=2$. Έτσι,

$$\alpha_\kappa=\alpha_1+(\kappa-1)\delta=2+(\kappa-1)3=3\kappa-1.$$

Επίσης, $\alpha_\kappa=29 \Leftrightarrow 3\kappa-1=29 \Leftrightarrow \kappa=10$.

(δ) Έχουμε

$$2\cdot 3+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+\cdots+2\cdot 3^{15}=2\sum_{k=1}^{15}3^{\kappa}$$

2. **(α)** Έχουμε

$$\sum_{\nu=3}^{7}\left(\frac{\nu-4}{\nu}\right)=\left(\frac{3-4}{3}\right)+\left(\frac{4-4}{4}\right)+\left(\frac{5-4}{5}\right)+\left(\frac{6-4}{6}\right)+\left(\frac{7-4}{7}\right)=-\frac{1}{3}+0+\frac{1}{5}+\frac{2}{6}+\frac{3}{7}=\frac{22}{35}$$

(β) Έχουμε

$$\sum_{\nu=1}^{50}(-1)^{\nu-1}=(-1)^0+(-1)^1+(-1)^2+\cdots+(-1)^{49}=1+(-1)+\cdots+(+1)+(-1)=0$$

Σημείωση: $$\sum_{\nu=1}^{50}(-1)^{\nu-1}=\sum_{=0}^{49}(-1)^{\nu}$$

(γ) Έχουμε

$$\sum_{i=1}^{4}(i^2+3i-1)=(1^2+3\cdot 1-1)+(2^2+3\cdot 2-1)+(3^2+3\cdot 3-1)+(4^2+3\cdot 4-1)$$

$$=3+9+17+27=56$$

3. Έχουμε

$$\sum_{\kappa=1}^{10}(3\kappa+\lambda)=245 \Leftrightarrow 3\sum_{\kappa=1}^{10}\kappa+\lambda\sum_{\kappa=1}^{10}1=245 \Leftrightarrow 3\sum_{\kappa=1}^{10}\kappa+\lambda\sum_{\kappa=1}^{10}1=245 \ \ (*)$$

Αλλά, $$\sum_{\kappa=1}^{10}\kappa=1+2+\cdots+10=55 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \sum_{\kappa=1}^{10}1=10$$

Έτσι, $(*) \Leftrightarrow 3\cdot 55+10\lambda=245 \ \Leftrightarrow 10\lambda=245-165 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda=8}$

4. **(α)** Έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\nu}(2\cdot 4^{\kappa-1})=\sum_{k=1}^{\nu}(2\cdot 2^{2\kappa-2})=\sum_{k=1}^{\nu}(2^{2\kappa-1})=2+2^3+2^5+\cdots+2^{2\nu-1}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε άθροισμα ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο 2 και σταθερό λόγο $\lambda=2^2=4$. Συνεπώς,

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{\nu}(2\cdot 4^{\kappa-1})=\frac{\alpha_1(\lambda^{\nu}-1)}{\lambda-1}=\frac{2(4^{\nu}-1)}{4-1}=\frac{2(4^{\nu}-1)}{3}}$$

(**β**) Έχουμε
$$\sum_{k=11}^{\nu}(5)=5\left(\sum_{k=1}^{\nu}(1)-\sum_{k=1}^{10}(5)\right)$$

Για το πρώτο άθροισμα, παρατηρούμε ότι έχουμε άθροισμα ν πρώτων όρων αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1=1$ και σταθερή διαφορά $\delta=1$. Συνεπώς,

$$\sum_{k=1}^{\nu}(1)=\frac{\nu(\alpha_1+\alpha_\nu)}{2}=\frac{\nu(1+1)}{2}=\nu$$

ενω για το δεύτερο, παρατηρούμε ότι έχουμε άθροισμα 10 πρώτων όρων αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1=1$ και σταθερή διαφορά $\delta=1$. Συνεπώς,

$$\sum_{k=1}^{10}(1)=\frac{10(1+1)}{2}=10 \quad \text{και αρα} \quad \boldsymbol{\sum_{k=11}^{\nu}(5)=5\left(\sum_{k=1}^{\nu}(1)-\sum_{k=1}^{10}(5)\right)=5(\nu-10)}$$

(**γ**)Έχουμε
$$\sum_{k=1}^{\nu}(2^{-\kappa})=\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{2^{\kappa}}=\sum_{k=1}^{\nu}\left(\frac{1}{2}\right)^{\kappa}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε άθροισμα ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $\frac{1}{2}$ και σταθερό λόγο $\lambda=\frac{1}{2}$. Συνεπώς,

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{\nu}(2^{-\kappa})=\frac{\alpha_1(\lambda^{\nu}-1)}{\lambda-1}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{\nu}}-1\right)}{\frac{1}{2^{\nu}}-1}=1-\frac{1}{2^{\nu}}}$$

5. Έχουμε για κάθε ν φυσικό αριθμό, $S_\nu=\nu^2+4\nu$.
Είναι

$$\alpha_\nu=S_\nu-S_{\nu-1}=\nu^2+4\nu-\left((\nu-1)^2+4(\nu-1)\right)=2\nu+3$$

και αρα η σειρά που αντιστοιχεί στο πιο πάνω μερικό άθροισμα είναι η

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty}\alpha_\nu=\sum_{\nu=1}^{+\infty}(2\nu+3)=(2\cdot 1+3)+(2\cdot 2+3)+\cdots$$
$$=5+7+9+11+\cdots$$

6. Έχουμε

$$\sum_{k=1}^{30}(4\alpha_\kappa-3\beta_\kappa)=\sum_{k=1}^{30}(4\alpha_\kappa)+\sum_{k=1}^{30}(-3\beta_\kappa)=4\sum_{k=1}^{30}\alpha_\kappa-3\sum_{k=1}^{30}\beta_\kappa$$

$$=4\cdot 300-3\cdot(-50)=1350$$