

Δραστηριότητες σελ. 58-59 (Μονοτονία-Ακρότατα Συνάρτησης)

1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = x^2 - 4x + 8$

(β) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

(γ) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x+1}$

(δ) $f(x) = \ln(x^2 + 4)$

2. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα, αν υπάρχουν, των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = -x^2 + 2x - 5$

(β) $f(x) = (x+1)^3$

(γ) $f(x) = (x+1)e^x$

(δ) $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

3. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα, αν υπάρχουν, των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = e^x \eta \mu x, x \in (0, \pi)$

(β) $f(x) = 2\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu(2x), x \in (0, 2\pi)$

4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 4, & x < -1 \\ 2 - x, & x \geq -1 \end{cases}$$

5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{2x^2 - \alpha x + \beta}{x^2 + 1}.$$

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 2$, να δείξετε ότι $3\alpha + 4\beta = 8$.

6. Η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \ln(2x) + \frac{\beta}{x} + \alpha, \quad x > 0$$

παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = 2 + \ln 2$. Να βρείτε τις τιμές $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

7. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$2f^3(x) + 6f(x) = 2x^3 + 6x + 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στο $\mathbb{R}$.

8. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10, \quad x \in [-3, 3]$$

Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

9. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας:

(α) Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .

ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

(β) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) , τότε ισχύει $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

(γ) Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και η f' αλλάζει πρόσημο στο x_0 , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ακρότατο.

ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

10. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + 6x + 5$, να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
11. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και ισχύει $\alpha^2 < 4(\beta - 1)$, να δείξετε ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = (x^2 + \alpha x + \beta)e^x$ δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.
12. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x - 1 - \ln x, x > 0$.
- (α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
 (β) Να αποδείξετε ότι $\ln x \leq x - 1, \forall x > 0$.
 (γ) Να αποδείξετε ότι $1 - \frac{1}{x} < \ln x, \forall x > 0$.
13. Να αποδείξετε ότι
 (α) $e^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ (β) $e^x \geq x^e, \forall x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
14. Αν $f''(x) < 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, να δείξετε ότι $f(x) > 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$.

Δραστηριότητες σελ. 58-59 (Μονοτονία-Ακρότατα Συνάρτησης)

1. 1ος τρόπος

Το γράφημα της συνάρτησης εκφράζει παραβολή με κορυφή στο σημείο με συντεταγμένες (2,4) στο οποίο λαμβάνει (ολικό) ελάχιστο αφού ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι θετικός. Έτσι η συνάρτηση είναι

- ο γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 2)$ και λόγω της συνέχειας αυτής στο σημείο $x = 2$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(\infty, -2]$
- ο γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(2, +\infty)$ και λόγω της συνέχειας αυτής στο σημείο $x = 2$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$.

2ος τρόπος

Η συνάρτηση είναι παντού παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2x - 4, \forall x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε ότι

$f' < 0$ στο διάστημα $(-\infty, 2) \Rightarrow f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό και λόγω της συνέχειας αυτής στο σημείο $x = 2$, **γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$**

$f' > 0$ στο διάστημα $(2, +\infty) \Rightarrow f$ είναι γνησίως

αύξουσα στο διάστημα αυτό και λόγω της συνέχειας αυτής στο σημείο $x = 2$, **γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$**

$[f'(2) = 0]$, έπεται ότι το γράφημα της συνάρτησης λαμβάνει τοπικό ελάχιστο στο σημείο αυτό. Επίσης, αφού $f''(x) = 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι η συνάρτηση είναι κυρτή. Έτσι, το σημείο $(2, f(2)) = (2, 4)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου για τη συνάρτηση].

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	-		+
f	$\searrow$		$\nearrow$
min			

(β) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 = x^3(3x - 4), x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση είναι παντού παραγωγίσιμη με

$f'(x) = 12x^2(x - 1), \forall x \in \mathbb{R}$ Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 1$ (κρίσιμα σημεία). Έχουμε:

$f' < 0$ στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και $f' < 0$ στο διάστημα $(0, 1)$ και άρα **γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$** . Επίσης, $f' > 0$ στο διάστημα $(1, +\infty)$ και άρα η συνάρτηση είναι **γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$** .

Επίσης, λόγω του ότι $f'(1) = 0$ και η συνάρτηση αλλάζει μονοτονία (από γν. φθίνουσα σε γν. αύξουσα)

σε μια περιοχή του σημείου $x = 1$, έπεται από το Κριτήριο πρώτης παραγώγου ότι το γράφημα της συνάρτησης λαμβάνει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $(1, f(1)) = (1, -1)$.

x	$-\infty$	0	1	∞
f'	-	-	-	-
f	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
min				

(Υ) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x+1}$. Είναι $D(f) = \mathbb{R}$. Η συνάρτηση είναι παντού παραγωγίσιμη με $f'(x) = -\frac{x(x-2)}{(x^2-x+1)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 2$ (κρίσιμα σημεία) και κατασκευάζοντας τον πίνακα προσήμων της f' :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f'	–		+	–
f	$\searrow$		$\nearrow$	$\searrow$
	min		max	

έχουμε:

$f' < 0$ στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και $f' > 0$ στο διάστημα $(0, 2)$ και αφού $f'(0) = 0$, από το κριτήριο 1ης παραγώγου, έχουμε ότι το γράφημα της συνάρτησης λαμβάνει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $(0, f(0)) = (0, -1)$. Σαφώς, η συνάρτηση είναι **γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γν. αύξουσα στο $[0, 2]$** .

- ο $f' > 0$ στο διάστημα $(0, 2)$ και $f' < 0$ στο διάστημα $(2, +\infty)$ και αρα γν. φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Ιδιαίτερα, λόγω της συνέχειας της συνάρτησης στο άνω άκρο του διαστήματος αυτού, έπεται ότι είναι γν. φθίνουσα στο $[2, +\infty)$. Επιπρόσθετα, αφού $f'(2) = 0$, από το κριτήριο 1ης παραγώγου, έχουμε ότι το γράφημα της συνάρτησης λαμβάνει τοπικό μέγιστο στο σημείο $(2, f(2)) = (2, \frac{1}{3})$.

(Ξ) $f(x) = \ln(x^2 + 4)$. Είναι $D(f) = \mathbb{R}$. Η συνάρτηση είναι παντού παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{2x}{x^2+4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και κατασκευάζοντας τον πίνακα προσήμων της f' :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	–	○	+
f	$\searrow$		$\nearrow$
	min		

έχουμε ότι $f' < 0$ στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και $f' > 0$ στο διάστημα $(0, +\infty)$ και αρα η συνάρτηση είναι γν. φθίνουσα στο πρώτο διάστημα και γν. αύξουσα στο δεύτερο. Επιπλέον, αφού $f'(0) = 0$, από το κριτήριο 1ης παραγώγου, έχουμε ότι το γράφημα της συνάρτησης λαμβάνει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $(0, f(0)) = (0, \ln 2)$.

Σημειώστε ότι η συνάρτηση είναι άρτια.

2. (Α) $f(x) = -x^2 + 2x + 5 = -(x-1)^2 + 4, x \in \mathbb{R}$ 1ος τρόπος

Το γράφημα της συνάρτησης εκφράζει παραβολή με κορυφή στο σημείο με συντεταγμένες (1,6) στο οποίο λαμβάνει μοναδικό (ολικό) μέγιστο αφού ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι αρνητικός.

2ος τρόπος

Η συνάρτηση είναι παντού παραγωγίσιμη με $f'(x) = -2x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Έχουμε ότι

$f' > 0$ στο διάστημα $(-\infty, 1) \Rightarrow f$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό και λόγω της συνέχειας αυτής στο σημείο $x = 1$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$
 $f' < 0$ στο διάστημα $(1, +\infty) \Rightarrow f$ είναι γνησίως φθίνουσα

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	+		–
f	$\nearrow$		$\searrow$
	max		

στο διάστημα αυτό και λόγω της συνέχειας αυτής στο σημείο $x = 1$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$

$[f'(1) = 0]$, έπεται ότι το γράφημα της συνάρτησης λαμβάνει τοπικό μέγιστο στο σημείο αυτό. Επίσης, αφού $f''(x) = -1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι η συνάρτηση είναι κοίλη. Έτσι, το σημείο $(1, f(1)) = (1, 6)$ είναι σημείο ολικού μεγίστου για τη συνάρτηση].

(β) $f(x) = (x+1)^3, x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση αποτελεί μια οριζόντια μεταφορά της συνάρτησης $g(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$ κατά μια μονάδα προς τα αριστερά. Είδαμε ότι η g δεν έχει ακρότατα, άρα ούτε και η f . Η απόδειξη είναι όμοια με την περίπτωση της g .

(γ) $f(x) = (x+1)e^x, x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση είναι παντού παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = (x+2)e^x, \forall x \in \mathbb{R}$. Έτσι, το μοναδικό της κρίσιμο σημείο είναι εκείνο με $x = -2$. Έχουμε ότι $f' < 0$ στο διάστημα $(-\infty, -2) \Rightarrow f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό και λόγω της συνέχειας αυτής στο σημείο $x = -2$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -2]$. Επίσης, $f' > 0$ στο διάστημα $(-2, +\infty) \Rightarrow f$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό και λόγω της συνέχειας αυτής στο σημείο $x = -2$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-2, +\infty)$. Από το κριτήριο 1ης παραγώγου, έπεται ότι το γράφημα της f λαμβάνει τοπικό ελάχιστο (το οποίο μπορούμε να αποδείξουμε ότι είναι και ολικό) στο σημείο $(-2, f(-2)) = (-2, -\frac{1}{e^2})$.

(δ) $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$. Είναι $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$. Η συνάρτηση είναι παντού παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$$

Συνεπώς, είναι $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$ και άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο π.ο. της και άρα δεν έχει ακρότατα.

3. (α) $f(x) = e^x \eta \mu x, x \in (0, \pi)$. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο π.ο. ως σύνθεση τέτοιων με

$$f'(x) = e^x (\eta \mu x + \sigma \nu \nu x), \quad \forall x \in (0, \pi)$$

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι μόνο εκείνα που ικανοποιούν την $f'(x) = 0$ στο διάστημα $(0, \pi)$, δηλ. την $\eta \mu x + \sigma \nu \nu x = 0$ στο διάστημα $(0, \pi)$. Έχουμε για $x \in (0, \pi) - \{\frac{\pi}{2}\}$

$$\eta \mu x + \sigma \nu \nu x = 0 \Leftrightarrow \eta \mu x = -\sigma \nu \nu x = 0 \Leftrightarrow \epsilon \varphi x = -1$$

η οποία έχει (κατά τα γνωστά) μια μόνο λύση στο $(0, \pi) - \{\frac{\pi}{2}\}$, την $x = \frac{3\pi}{4}$. Έχουμε ότι $f' > 0$ στο διάστημα $(0, \frac{3\pi}{4}) \Rightarrow f$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό και λόγω της συνέχειας αυτής στα σημεία $x = 0, \frac{3\pi}{4}$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, \frac{3\pi}{4}]$. Επίσης, $f' < 0$ στο διάστημα $(\frac{3\pi}{4}, \pi) \Rightarrow f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό και λόγω της συνέχειας αυτής στο σημείο $x = \frac{3\pi}{4}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\frac{3\pi}{4}, \pi)$. Από το κριτήριο 1ης παραγώγου, έπεται ότι το γράφημα της f λαμβάνει τοπικό μέγιστο (το οποίο μπορούμε να αποδείξουμε ότι είναι και ολικό) στο σημείο $(\frac{3\pi}{4}, f(\frac{3\pi}{4}))$.

(β) $f(x) = 2\eta \mu x + \sigma \nu \nu(2x), x \in (0, 2\pi)$. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο π.ο. ως σύνθεση τέτοιων με

$$f'(x) = 2\sigma \nu \nu x - 2\eta \mu(2x) = 2\sigma \nu \nu x - 4\eta \mu x \sigma \nu \nu x = 2\sigma \nu \nu x(1 - 2\eta \mu x) \quad \forall x \in (0, 2\pi)$$

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι μόνο εκείνα που ικανοποιούν την $f'(x) = 0$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$, δηλ. την $\sigma \nu \nu x(1 - 2\eta \mu x) = 0$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$. Έχουμε για $x \in (0, 2\pi)$

$$\sigma \nu \nu x(1 - 2\eta \mu x) = 0 \Leftrightarrow \sigma \nu \nu x = 0 \text{ ή } \eta \mu x = \frac{1}{2}$$

Λύνοντας τις πιο πάνω κατά τα γνωστά (δες παράρτημα) βρίσκουμε ότι οι μόνες της λύσεις στο διάστημα $(0, 2\pi)$ είναι οι $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$. Εύκολα βρίσκουμε (όπως και πριν) ότι το γράφημα της συνάρτησης f λαμβάνει τοπικό μέγιστο στα σημεία $(\frac{\pi}{6}, f(\frac{\pi}{6})) = (\frac{\pi}{6}, \frac{3}{2})$ και $(\frac{5\pi}{6}, f(\frac{5\pi}{6})) = (\frac{5\pi}{6}, \frac{3}{2})$ και τοπικό ελάχιστο στα σημεία $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2})) = (\frac{\pi}{2}, 1)$ και $(\frac{3\pi}{2}, f(\frac{3\pi}{2})) = (\frac{3\pi}{2}, -3)$. Παρατηρήστε ότι $f(\frac{\pi}{6}) = f(\frac{5\pi}{6})$.

$$4. f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 4, & x < -1 \\ 2 - x, & x \geq -1 \end{cases}$$

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $\mathbb{R} - \{-1\}$ αφού σε κάθε ένα από τους δυο κλάδους είναι πολυώνυμο. Ελέγχουμε τη συνέχεια στο $x = -1$: $f(-1) = 2 - (-1) = 3$ και

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + 2x + 4) = 3 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (2 - x) = 3$$

οπότε η συνάρτηση είναι συνεχής στο $x = -1$. Για την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης στο $x = -1$ έχουμε

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x + 1) = 0$$

και

$$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2 - x - 3}{x + 1} = -1$$

και αρα αφού $f'_-(-1) \neq f'_+(-1)$, έχουμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = -1$. Συνεπώς,

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x + 1), & x < -1 \\ -1, & x > -1 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $f' < 0$ σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $(-1, +\infty)$ και αρα γνησίως φθίνουσα εκεί. Όμως, λόγω της συνέχειας της συνάρτησης στο $x = -1$, **η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα παντού στο π.ο. της.**

$$5. f(x) = \frac{2x^2 - \alpha x + \beta}{x^2 + 1}. \text{ Είναι } \{x^2 + 1 = 0\} = \emptyset \text{ και αρα } D(f) = \mathbb{R}. \text{ Επίσης, } \forall x \in \mathbb{R}, \text{ είναι}$$

$$f'(x) = \frac{\alpha x^2 - 2x(\beta - 2) - \alpha}{(x^2 + 1)^2}$$

Για να έχει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = -2$, **αρκεί (δες Θ. Fermat)** $f'(-2) = 0$, δηλ. $4\alpha + 4(\beta - 2) - \alpha = 0$, δηλ. $3\alpha + 4\beta = 8$.

$$6. f(x) = \alpha \ln(2x) + \frac{\beta}{x} + \alpha. \text{ Είναι, } \forall x > 0$$

$$f'(x) = \frac{\alpha}{x} - \frac{\beta}{x^2}$$

Για να παρουσιάζει η συνάρτηση τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$, αρκεί από το Θεώρημα του Fermat (γιατί;) να είναι $f'(1) = 0$, δηλ. $\alpha = \beta$. Επιπλέον, αφού $(1, 2 + \ln 2) \in Gr(f)$, θα είναι $2 + \ln 2 = \alpha \ln 2 + \beta + \alpha$, δηλ. $2 + \ln 2 = \beta(2 + \ln 2)$, δηλ. **$\beta = 1$** και αρα **$\alpha = 1$** .

7. 1ος τρόπος: Έχουμε $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2f^3(x) + 6f(x) = 2x^3 + 6x + 1 & \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, & 6f^2(x)f'(x) + 6f'(x) = 6x^2 + 6 \\ & \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, & 6f'(x)(f^2(x) + 1) = 6(x^2 + 1) \\ f^2(x) + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} & \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, & f'(x) = \frac{x^2 + 1}{f^2(x) + 1} > 0 \end{aligned}$$

και αρα, από γνωστό μας θεώρημα, η f είναι γνησίως αύξουσα παντού και αρα δεν έχει τοπικά ακρότατα.

2ος τρόπος: Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση λαμβάνει ακρότατο σε ένα σημείο έστω x_0 , τότε απ'το Θεώρημα του Fermat, αφού η συνάρτηση είναι παντού παραγωγίσιμη, θα είναι $f'(x_0) = 0$. Αλλά, όπως πριν, έχουμε ότι $f'(x) = \frac{x^2 + 1}{f^2(x) + 1} > 0$, άτοπο.

8. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$, $x \in [-3, 3]$. Η συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα $[-3, 3]$. Θα βρούμε τα διαστήματα μονοτονίας της:

$\forall x \in [-3, 3]$ είναι $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x - 2)(x + 1)$ και αρα τα κρίσιμά της σημεία (στο διάστημα $[-3, 3]$) είναι τα $-1, 2$. Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων της f'

x	-3	-1	2	+3
f'	+	-	+	
f	↗	↘	↗	
	max		min	

Έτσι, $f' > 0$ στο διάστημα $(-3, -1)$ και $f' < 0$ στο διάστημα $(-1, 2)$ και αφού $f'(-1) = 0$, έπεται ότι στο σημείο με $x = -1$ λαμβάνει τοπικό μέγιστο. Ομοίως, έχουμε ότι στο σημείο με $x = 2$ λαμβάνει τοπικό ελάχιστο. Τέλος, αφού η συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα $[-3, 3]$, ελέγχουμε τις τιμές της στα άκρα:

$$f(-3) = -35, \quad f(3) = 1$$

και αφού $f(-1) = 17$, $f(2) = -10$, έπεται ότι το ολικό μέγιστο της συνάρτησης λαμβάνεται στο σημείο με $x = -1$ και ολικό ελάχιστο της συνάρτησης λαμβάνεται στο σημείο με $x = 2$. Έτσι, το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $[f(-3), f(-1)] = [-35, 17]$.

- 9. (α) Σωστό.** Αν όμως απαιτήσουμε (όπως ήταν άλλωστε στην πρώτη έκδοση του σχολικού) η συνάρτηση να είναι θετική, τότε το αποτέλεσμα είναι **Λάθος** Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x + 4x^2 \eta \mu \left(\frac{1}{x} \right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} . \text{ Είναι για } x \neq 0 \quad f'(x) = 1 + 8x \eta \mu \left(\frac{1}{x} \right) - 2x \sigma \nu \nu \left(\frac{1}{x} \right), \text{ Είναι } f'(0) = 1 >$$

0 αλλά η f δεν είναι γνησίως αύξουσα σε καμιά (ανοικτή) περιοχή του μηδενός (η οποία είναι ταυτόχρονα θετική και αρνητική σε κάθε περιοχή του $x = 0$). Συγκεκριμένα, μπορεί να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε διάστημα της μορφής $\left(\frac{1}{2\nu\pi + \frac{4\pi}{3}}, \frac{1}{2\nu\pi + \frac{2\pi}{3}} \right)$ και γνησίως αύξουσα σε κάθε διάστημα της μορφής

$$\left(\frac{1}{(2\nu + 1)\pi + \frac{7\pi}{6}}, \frac{1}{(2\nu + 1)\pi + \frac{5\pi}{6}} \right), \nu \in \mathbb{N}.$$

(β) Λάθος. Π.χ. η f με τύπο $f(x) = -x^3$.

(γ) Σωστό. Λόγω της συνέχειας της συνάρτησης στο σημείο. Αν αφαιρέσουμε την υπόθεση της συνέχειας, τότε παύει να ισχύει.

- 10.** Για να είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$ η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + 6x + 5$, από το Θεώρημα 4 αρκεί $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αλλά,
- $$(f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (6x^2 + 2\alpha x + 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (3x^2 + \alpha x + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R})$$
- $$(\alpha^2 - 36 > 0, \forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow ((\alpha - 6)(\alpha + 6) > 0, \forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \alpha \in (-6, 6)$$
- $(4(\alpha^2 - 36))$ είναι η διακρίνουσα του πολυωνύμου $3x^2 + \alpha x + 3$. Αλλά, τα σημεία $x = \pm 6$ είναι μεμονωμένα, άρα αρκεί τελικά $\alpha \in [-6, 6]$.

- 11.** $f(x) = (x^2 + \alpha x + \beta)e^x$. Είναι $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = (x^2 + (\alpha + 2)x + \alpha + \beta)e^x$$

Η διακρίνουσα του πολυωνύμου $x^2 + (\alpha + 2)x + \alpha + \beta$ είναι $\alpha^2 - 4(\beta - 1) < 0$ από υπόθεση και αρα δεν έχει (πραγματικές ρίζες). Έτσι και αφού $e^x > 0$, έπεται ότι $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ και το συμπέρασμα έπεται (άτοπο, από το Θεώρημα του Fermat)

- 12.** $f(x) = x - 1 - \ln x, x > 0$

(α) Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο Π.Ο. της με

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x - 1}{x}, x > 0$$

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (κρίσιμο σημείο). Είναι

$$f''(x) = \frac{1}{x^2}, x > 0$$

και αρα αφού $f''(1) > 0$, έπεται ότι το γράφημα της συνάρτησης παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $(1, f(1)) = (1, 0)$. Η συνάρτηση, αυτή είναι (κατά τα γνωστά) γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$ και αρα το σημείο αυτό είναι και σημείο ολικού ελαχίστου, δηλ.

$\min_{x \in (0, +\infty)} f(x) = 0$. Διαφορετικά: κατά τα γνωστά εργαλεία, είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

(β) Αφού $\min_{x \in (0, +\infty)} f(x) = 0$, έπεται ότι $\forall x \in (0, +\infty)$

$$f(x) \geq 0, \text{ δηλ. } x - 1 - \ln x \geq 0, \text{ δηλ. } \ln x \leq x - 1$$

(γ) 1ος Τρόπος: Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \frac{1}{x} - 1 + \ln x, x > 0$ και προχωρώντας όπως πιο πάνω, έχουμε ότι αυτή παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο με $x = 1$.

2ος Τρόπος: Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \frac{1}{x} - 1 + \ln x, x > 0$. Είναι

$$g'(x) = \frac{x-1}{x^2}, x > 0$$

και αρα $g'(x) < 0, \forall x \in (0, 1)$ δηλ. g γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1)$. Συνεπώς, $g(x) > g(1) = 0, \forall x \in (0, 1)$, δηλ.

$$\ln x > 1 - \frac{1}{x}, \forall x \in (0, 1)$$

Για $x = 1$ ισχύει η ισότητα. Τώρα, αν $x \in (1, +\infty)$, $g'(x) > 0$ δηλ. g γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$. Συνεπώς, $g(x) > g(1) = 0, \forall x \in (1, +\infty)$, δηλ.

$$\ln x > 1 - \frac{1}{x}, \forall x \in (1, +\infty)$$

13. (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = e^x - x - 1, x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο Π.Ο. της με $g'(x) = e^x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Είναι $g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ (κρίσιμο σημείο). Είναι $g'(x) < 0, \forall x < 0$ και αρα η g γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και $g'(x) > 0, \forall x \in (0, +\infty)$ και αρα η g γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Συνεπώς, το γράφημα της συνάρτησης παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 0$ και αρα $g(x) \geq g(0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, δηλ. $e^x - x - 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, δηλ. $e^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Η ισότητα ισχύει για $x = 0$.

Σημείωση: Λόγω της συνέχειας της συνάρτησης στο $x = 1$, έχουμε τελικά ότι η g γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$. Αλλά το σημείο $x = 1$ είναι μεμονωμένο και λόγω της συνέχειας της συνάρτησης, δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα μας.

(β) Θα αποδείξουμε ότι $e^x \geq x^e, \forall x > 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο Π.Ο. της με

$$g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, x > 0$$

Είναι $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$ (κρίσιμο σημείο). Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων της g' :

x	0	e	$+\infty$
g'	+	○	-
g	↗		↘
max			

Είναι $g'(x) < 0, \forall x \in (0, e)$ και αρα η g γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό και $g'(x) > 0, \forall x \in (e, +\infty)$ και αρα η g γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Αφού λοιπόν $g'(e) = 0$, έπεται ότι το σημείο $(e, g(e)) = (e, \frac{1}{e})$ είναι σημείο ολικού μεγίστου για την g . Συνεπώς, θα είναι $g(x) > g(e) = \frac{1}{e}, \forall x \in (0, +\infty)$ δηλ.

$$\frac{\ln x}{x} > \frac{1}{e} \Rightarrow e \ln x > x \Rightarrow \ln x^e > \ln e^x \text{ ln γν. αύξουσα } \Rightarrow x^e > e^x$$

Για $x = e$ ισχύει η ισότητα.

Δεύτερος τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$. Είναι $D(f) = (0, +\infty)$ θυμόμαστε ότι για να βρούμε την παράγωγο συνάρτηση εφαρμόζουμε λογαριθμική παραγωγή:

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}, \quad x > 0$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \ln x^{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln x$$

$$\Rightarrow (\ln f(x))' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \Rightarrow f'(x) = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Λογαριθμούμε
αμφότερα μέλη

Παραγωγίζουμε
αμφότερα μέλη

Προχωράμε όπως πριν. Και οι 2 τρόποι είναι ισοδύναμοι, αφού $e^e > x^x \Leftrightarrow x^e > e^x$.

14.
$$\begin{cases} f''(x) < 0, \quad \forall x \in [\alpha, \beta] \\ f(\alpha) = f(\beta) = 0 \end{cases}$$

Έστω $x \in (\alpha, \beta)$ σταθεροποιημένο. Από το ΘΜΤ σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[\alpha, x]$ και $[x, \beta]$ έχουμε ότι:

- Υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - \overbrace{f(\alpha)}^0}{x - \alpha} = \frac{f(x)}{x - \alpha}$$

- και υπάρχει $\xi_2 \in (x, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{\overbrace{f(\beta)}^0 - f(x)}{\beta - x} = -\frac{f(x)}{\beta - x}$$

Αλλά, αφού $f''(x) < 0, \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$, έπεται ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και αφού $\xi_1 < \xi_2$, έπεται ότι $f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$, δηλ.

$$-\frac{f(x)}{\beta - x} < \frac{f(x)}{x - \alpha} \Rightarrow \frac{f(x)}{x - \alpha} + \frac{f(x)}{\beta - x} > 0$$

και αφού $x - \alpha > 0, \quad \beta - x > 0$ έπεται ότι $f(x) > 0$. Αφού το x ήταν τυχαίο, έπεται το ζητούμενο.