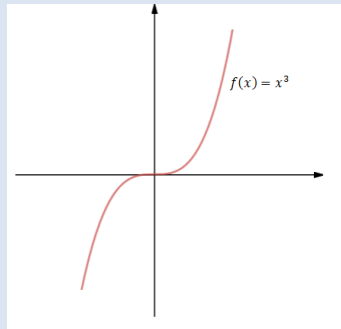


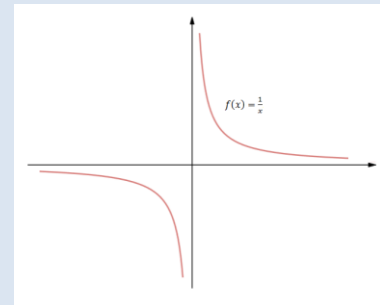
Δραστηριότητες σελ. 36 (Μονοτονία Συνάρτησης)

1. Να βρείτε ποιές από τις πιο κάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες και ποιές γνησίως φθίνουσες για κάθε τιμή του x που ανήκει στο πεδίο ορισμού τους:

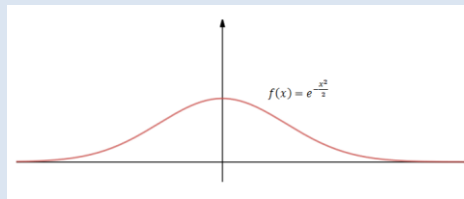
(α)



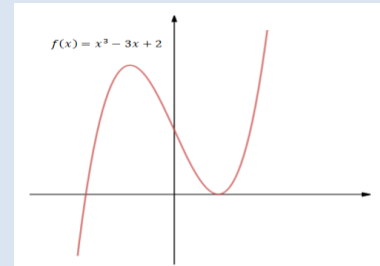
(β)



(γ)



(δ)



2. Να βρείτε ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες και ποιές γνησίως φθίνουσες στο ευρύτερο πεδίο ορισμού τους:

(α) $f(x) = 5 - 3x$

(β) $f(x) = 4 \ln x + 1$

(γ) $f(x) = 2e^{x-1} + 1$

3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x) = -x^2 + 4x - 5$$

στο διάστημα $[1,4]$.

Δραστηριότητες σελ. 36 (Μονοτονία Συνάρτησης)

1. (α) $f(x) = x^3$. Είναι $D(f) = \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** στο Π.Ο. της.

Είναι $D(f) = \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** στο Π.Ο. της: Πράγματι, έστωσαν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$$

Παρατηρούμε ότι $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $x_1 = x_2 = 0$. Όμως $x_1 < x_2$ και άρα δεν μπορεί να είναι $x_1 = x_2 = 0$.

Απόδειξη του τελευταίου ισχυρισμού:

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

$$\Rightarrow (x_1 + x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

$$\Rightarrow (x_1 + x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 = 2(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \underbrace{(x_1 + x_2)^2}_{\geq 0} + \underbrace{x_1^2}_{\geq 0} + \underbrace{x_2^2}_{\geq 0} = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$$

$$\text{ή } x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3x_2^2}{4}$$

Έτσι, αφού επιπλέον $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 < 0$, έπεται ότι $x_1^3 - x_2^3 < 0$, δηλ. $x_1^3 < x_2^3$, δηλ. $f(x_1) < f(x_2)$

(β) $f(x) = \frac{1}{x}$. Είναι $D(f) = \mathbb{R}_*$. Η f είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(0, +\infty)$ και $(-\infty, 0)$ αλλά όχι στην ένωσή τους, δηλ. στο Π.Ο. της f .

Απόδειξη ισχυρισμού 1

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$: έστωσαν $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$: με $x_1 < x_2$. Δηλ. $0 < x_1 < x_2$. Τότε

$$\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}, \quad \text{δηλ.} \quad f(x_2) < f(x_1)$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$: έστωσαν $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ με $x_1 < x_2$. Δηλ. $x_1 < x_2 < 0$. Τότε

$-x_1 > -x_2 > 0$ και το αποτέλεσμα έπεται από το ίδιο με πρίν επιχείρημα:

$$-\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2} \quad \text{και αρα} \quad \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}, \quad \text{δηλ.} \quad f(x_2) < f(x_1)$$

Απόδειξη ισχυρισμού 2: Είναι $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 < f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ ενώ $-\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$

(γ) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Είναι $D(f) = \mathbb{R}$. Επίσης, η f είναι συνεχής παντού (ως σύνθεση τέτοιων). Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$: έστωσαν $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ με $x_1 < x_2$. Δηλ. $x_1 < x_2 < 0$. Τότε

$$-\frac{x_1^2}{2} < -\frac{x_2^2}{2}$$

και αφού η εκθετική συνάρτηση είναι αύξουσα, έπεται ότι

$$e^{-\frac{x_1^2}{2}} < e^{-\frac{x_2^2}{2}}$$

δηλ. $f(x_1) < f(x_2)$. Λόγω της συνέχειας της f στο $x = 0$, έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$. Εντελώς όμοια αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια:

$$\forall x \in D(f) = \mathbb{R}, (-x) \in D(f) = \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \forall x \in D(f) = \mathbb{R}, f(-x) = e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}} = f(x)$$

και ο δεύτερος ισχυρισμός έπεται από τον πρώτο.

(δ) $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Είναι $D(f) = \mathbb{R}$. Είναι για κάθε $x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$

- Έστωσαν $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Δηλ. $1 < x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Εφαρμόζοντας το ΘΜΤ στο διάστημα $[x_1, x_2]$, θα υπάρχει ένα $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

και αρα $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. Αλλά, $f'(\xi) = 3(\xi - 1)(\xi + 1) > 0$ αφού $\xi \in (x_1, x_2) \subset (1, +\infty)$. Συνεπώς, αφού $0 < x_2 - x_1$, έπεται ότι $f(x_2) - f(x_1) > 0$, δηλ. $f(x_1) < f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$ και άρα, λόγω της συνέχειας της f στο $x = 1$, έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

- Έστωσαν $x_1, x_2 \in (-1, 1)$ με $-1 < x_1 < x_2 < 1$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) > f(x_2)$. Εφαρμόζοντας το ΘΜΤ στο διάστημα $[x_1, x_2]$, θα υπάρχει ένα $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

και αρα $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. Αλλά, $f'(\xi) = 3(\xi - 1)(\xi + 1) < 0$ αφού $\xi \in (x_1, x_2) \subset (-1, 1)$. Συνεπώς, αφού $0 < x_2 - x_1$, έπεται ότι $f(x_2) - f(x_1) < 0$, δηλ. $f(x_1) > f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 1)$ και άρα, λόγω της συνέχειας της f στα σημεία με $x = -1, 1$, έπεται ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 1]$.

- Έστωσαν $x_1, x_2 \in (-\infty, -1)$ με $x_1 < x_2$. Δηλ. $x_1 < x_2 < -1$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Εφαρμόζοντας το ΘΜΤ στο διάστημα $[x_1, x_2]$, θα υπάρχει ένα $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

και αρα $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. Αλλά, $f'(\xi) = 3(\xi - 1)(\xi + 1) > 0$ αφού $\xi \in (x_1, x_2) \subset (-\infty, -1)$. Συνεπώς, αφού $0 < x_2 - x_1$, έπεται ότι $f(x_2) - f(x_1) > 0$, δηλ. $f(x_1) < f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, -1)$ και άρα, λόγω της συνέχειας της f στο $x = -1$, έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$.

Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x + 2 &= x^3 + x^2 - 2x - x^2 - x + 2 \\ &= x(x^2 + x - 2) &= -(x^2 + x - 2) \\ &= \frac{(x^2 + x - 2)(x + 2)}{(x-1)(x+2)} &= (x+2)^2(x-1) \end{aligned}$$

2. (α) $f(x) = 5 - 3x$. Είναι $D(f) = \mathbb{R}$.

Έστωσαν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε $-x_1 > -x_2$ και άρα $-3x_1 > -3x_2$ και άρα $5 - 3x_1 > 5 - 3x_2$, δηλ. $f(x_1) > f(x_2)$. Συνεπώς, η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο Π.Ο. της.

(β) $f(x) = 4 \ln x + 1$. Είναι $D(f) = (0, +\infty)$. Έστωσαν $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε, αφού η συνάρτηση $x \mapsto \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα, έπεται ότι $\ln x_1 < \ln x_2$ και άρα $4 \ln x_1 + 1 < 4 \ln x_2 + 1$ δηλ. $f(x_1) < f(x_2)$. Συνεπώς, η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο Π.Ο. της.

(γ) $f(x) = 2e^{x-1} + 1$. Είναι $D(f) = \mathbb{R}$.

Έστωσαν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε $x_1 - 1 < x_2 - 1$ και αφού η συνάρτηση $x \mapsto e^x$ είναι γνησίως αύξουσα, έπεται ότι $e^{x_1-1} < e^{x_2-1}$ και άρα $2e^{x_1-1} + 1 < 2e^{x_2-1} + 1$ δηλ. $f(x_1) < f(x_2)$. Συνεπώς, η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο Π.Ο. της.

3. Είναι

$$f(x) = -x^2 + 4x - 5 = -(x^2 - 4x + 5) = -(x^2 - 4x + 4) - 1 = -(x - 2)^2 - 1$$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2, 4]$: Πράγματι,

ο έστωσαν $x_1, x_2 \in [2, 4]$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$\begin{aligned} 2 < x_1 < x_2 &\Rightarrow 0 < x_1 - 2 < x_2 - 2 &\Rightarrow (x_1 - 2)^2 < (x_2 - 2)^2 \\ &\Rightarrow -(x_1 - 2)^2 > -(x_2 - 2)^2 &\Rightarrow -(x_1 - 2)^2 - 1 > -(x_2 - 2)^2 - 1 \end{aligned}$$

ήτοι $f(x_1) > f(x_2)$.

Έτσι, λόγω και της συνέχειας της συνάρτησης (Θεώρημα Μέγιστης-Ελάχιστης Τιμής), η μέγιστη τιμή της στο διάστημα $[2, 4]$ είναι η $f(2) = -1$ και η ελάχιστη η $f(4) = -5$. Επίσης, αυτό μας λέει ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το διάστημα $[f(4), f(2)] = [-5, -1]$.