

Δραστηριότητες σελ. 28 (Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού)

1. Να βρείτε, αν υπάρχουν, όλα τα ξ που ικανοποιούν το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την καθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις στο δοσμένο διάστημα:

(α) $f(x) = x^2 + 2x - 1, x \in [0,1]$ (β) $f(x) = \frac{3}{x}, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

(γ) $f(x) = \sqrt{x-1}, x \in [1,3]$ (δ) $f(x) = \ln(x-1), x \in [2,4]$

2. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει $f(\alpha) = \beta\sqrt{3}$ και $f(\beta) = \alpha\sqrt{3}$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της καμπύλης του γραφήματος της f σε σημείο $(x_0, f(x_0))$ αυτού να σχηματίζει με τον άξονα xx' γωνία ίση με $\frac{2\pi}{3}$ ακτίνια.

3. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας:

(α) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , τότε υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $f(\beta) - f(\alpha) = f'(\xi)(\beta - \alpha)$ ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

(β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}, \forall x \in (\alpha, \beta)$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\beta) - f(\alpha) = f'(\xi)(\beta - \alpha)$. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

(γ) Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση και $f'(x) = 0, \forall x \in A$, τότε $f(x) = c$ στο A . ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

4. Δίνεται συνάρτηση $f: [0, \kappa] \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $\kappa > 0$, με τύπο $f(x) = e^x$. Να δείξετε ότι:

(α) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, \kappa)$ τέτοιο ώστε

$$e^\xi = \frac{e^\kappa - 1}{\kappa}$$

(β) Ισχύει η ανισότητα

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + xe^x, x \geq 0$$

5. Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα:

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1, \quad x > 0$$

6. Δίνεται συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) , για την οποία ισχύει $f(\alpha) = 2\beta$ και $f(\beta) = 2\alpha$. Να δείξετε ότι:

(α) η εξίσωση $f(x) = 2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β)

(β) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε να ισχύει $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 4$.

Δραστηριότητες σελ. 28 (Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού)

1. (α) $f(x) = x^2 + 2x - 1, x \in [0,1]$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πολυωνυμική. Έτσι, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, θα υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 2 - (-1) = 3$$

δηλ. $f'(\xi) = 3$. Έχουμε

$$f'(\xi) = 3 \Leftrightarrow 2\xi + 2 = 3 \Leftrightarrow \xi = \frac{1}{2}$$

(β) $f(x) = \frac{3}{x}, x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Η συνάρτηση f είναι καλά ορισμένη αφού $x \in [\frac{1}{2}, 1] \Rightarrow x \neq 0$. Επίσης, στο $[\frac{1}{2}, 1]$, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(\frac{1}{2}, 1)$ ως συνθέσεις τέτοιων. Έτσι, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, θα υπάρχει $\xi \in (\frac{1}{2}, 1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(\frac{1}{2})}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(f(1) - f(\frac{1}{2}) \right) = 2(3 - 6) = -6$$

Έχουμε

$$f'(\xi) = -6 \Leftrightarrow -\frac{3}{\xi^2} \Leftrightarrow \xi = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \xLeftrightarrow[\xi \in (\frac{1}{2}, 1)] \xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(γ) $f(x) = \sqrt{x-1}, x \in [1,3]$. Η συνάρτηση f είναι καλά ορισμένη αφού $x \in [1,3] \Rightarrow (x-1) \in [0,2]$. Επίσης, στο $[1,3]$, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ ως συνθέσεις τέτοιων. Έτσι, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, θα υπάρχει $\xi \in (1,3)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Έχουμε

$$f'(\xi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{\xi-1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\xi-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \xi = \frac{3}{2}$$

(δ) $f(x) = \ln(x-1), x \in [2,4]$. Η συνάρτηση f είναι καλά ορισμένη αφού $x \in [2,4] \Rightarrow (x-1) \in [1,3]$. Επίσης, στο $[2,4]$ είναι συνεχής και στο $(2,4)$ παραγωγίσιμη ως συνθέσεις τέτοιων. Έτσι, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, θα υπάρχει $\xi \in (2,4)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{\ln 3 - \ln 1}{2} = \frac{\ln 3}{2}$$

Έχουμε

$$f'(\xi) = \frac{\ln 3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi-1} = \frac{\ln 3}{2} \Leftrightarrow \xi - 1 = \frac{2}{\ln 3} \Leftrightarrow \xi = \frac{2}{\ln 3} + 1$$

2. f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και αρα από το ΘΜΤ υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ για το οποίο ισχύει

$$f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\alpha\sqrt{3} - \beta\sqrt{3}}{\beta - \alpha} = -\sqrt{3}$$

Αλλά, $f'(x_0) = \lambda_{\varepsilon\varphi.}(x_0, f(x_0)) = \varepsilon\varphi(\theta)$, όπου θ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της καμπύλης του γραφήματος της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ αυτού με τον άξονα xx' . Έτσι,

$$\varepsilon\varphi(\theta) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ αφού } \theta \in (0, \pi).$$

3. (α) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , τότε υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $f(\beta) - f(\alpha) = f'(\xi)(\beta - \alpha)$:

ΛΑΘΟΣ. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

παρουσιάζει ασυνέχεια στο σημείο $x = 0$ αλλά είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f'(x) = 0, \forall x \in (0,1)$. Το συμπέρασμα του ΘΜΤ δεν ισχύει:

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = -1$$

(β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}, \forall x_0 \in (\alpha, \beta)$, τότε υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $f(\beta) - f(\alpha) = f'(\xi)(\beta - \alpha)$: **ΣΩΣΤΟ**

Η συνθήκη $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}, \forall x \in (\alpha, \beta)$ είναι ισοδύναμη με το ότι η παράγωγος συνάρτηση της f ορίζεται στο εσωτερικό του συνόλου $[\alpha, \beta]$, δηλ. στο (α, β) .

(γ) ΛΑΘΟΣ. Αντιπαράδειγμα: Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x + 1$. Η συνάρτηση δεν είναι σταθερή, αλλά $f'(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

4. **(α)** $f(x) = e^x, x \in [0, \kappa]$. Πληρούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤ του ΔΛ για την f στο διάστημα $[0, \kappa]$: υπάρχει $\xi \in (0, \kappa)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\kappa) - f(0)}{\kappa - 0} = \frac{e^\kappa - 1}{\kappa}, \text{ δηλ. } e^\xi = \frac{e^\kappa - 1}{\kappa}$$

(β) Θα αποδείξουμε την πιο κάτω ανίσωση:

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + xe^x, x \geq 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^x$. Αν το $x = 0$, τότε ισχύει η ισότητα. Έστω $x \in (0, +\infty)$ σταθεροποιημένο. Τότε, ορίζεται το διάστημα $[0, x]$. Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ στο διάστημα αυτό:

υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^x - 1}{x}$$

Αλλά $f'(\xi) = e^\xi$ και αρα

$$f'(\xi) = \frac{e^x - 1}{x} \Leftrightarrow e^\xi = \frac{e^x - 1}{x} \Leftrightarrow e^x = xe^\xi + 1 > x + 1$$

αφού $\xi \in (0, x) \Rightarrow e^\xi > e^0 = 1$. Επίσης, αφού $\xi \in (0, x) \Rightarrow e^\xi < e^x$ και το πιο πάνω συμπέρασμα μας δίνει ότι $e^x < 1 + xe^x$.

5. Θα αποδείξουμε την πιο κάτω ανίσωση:

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1, x > 0$$

Αν $x = 1$, τότε ισχύει η ισότητα. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln x, x > 0$. Έστω $x \in (0, 1)$ σταθεροποιημένο. Τότε, ορίζεται το διάστημα $[x, 1]$. Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ στο διάστημα αυτό: υπάρχει $\xi \in (x, 1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \frac{\ln 1 - \ln x}{1 - x} = \frac{-\ln x}{1 - x} = \frac{\ln x}{x - 1}$$

Αλλά $f'(\xi) = \frac{1}{\xi}$ και αρα

$$f'(\xi) = \frac{\ln x}{x - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln x}{x - 1}$$

Όμως, $0 < x < \xi < 1 \Rightarrow \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}$ και αρα

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{\xi} = \frac{\ln x}{x - 1} \Rightarrow \frac{\ln x}{x - 1} < \frac{1}{x} \xrightarrow{x-1 < 0} \ln x > \frac{x - 1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$$

Επίσης, εφαρμόζουμε το προηγούμενο ερώτημα $1 + y < e^y, y > 0$ για $y = \ln x$ και παίρνουμε:

$$1 + \ln x < e^{\ln x} \Rightarrow 1 + \ln x < x \Rightarrow \ln x < x - 1$$

Αν $1 < x$, τότε ακολουθούμε την ίδια διαδικασία και επαληθεύουμε την ανίσωση.

6. (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h = f - 2id$, όπου id η ταυτοτική συνάρτηση. Τότε, η h είναι

- συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως σύνθεση τέτοιων
- f παραγωγίσιμη στο (α, β) ως σύνθεση τέτοιων

και ισχύει ότι $h(\alpha) = f(\alpha) - 2id(\alpha) = 2\beta - 2\alpha = 2(\alpha - \beta)$ και $h(\beta) = f(\beta) - 2id(\beta) = 2\alpha - 2\beta = 2(\beta - \alpha)$ και αρα $h(\alpha) = -h(\beta)$. Συνεπώς, $h(\alpha)h(\beta) < 0$ και αρα από το Θεώρημα του Bolzano, η h έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (α, β) , δηλ. η εξίσωση $f(x) = 2x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (α, β) .

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = f(x) - 2\beta$. Είναι $h(\alpha) = f(\alpha) - 2\beta = 0$. Από το ΘΜΤ υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ για το οποίο ισχύει $h'(\xi_1) = \frac{h(\beta) - h(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{h(\beta)}{\beta - \alpha} = \frac{f(\beta) - 2\beta}{\beta - \alpha} = \frac{2\alpha - 2\beta}{\beta - \alpha} = -\frac{2(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} = -2$. Αλλά, $h'(x) = f'(x), \forall x \in [\alpha, \beta]$ και αρα $2 = h'(\xi_1) = f'(\xi_1)$. Ομοίως, θεωρούμε τη συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = f(x) - 2\alpha$. Είναι $h(\beta) = f(\beta) - 2\alpha = 0$. Από το ΘΜΤ υπάρχει $\xi_2 \in (\alpha, \beta)$ για το οποίο ισχύει $h'(\xi_2) = \frac{h(\beta) - h(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{-h(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{2\beta - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{2\beta - 2\alpha}{\beta - \alpha} = \frac{2(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} = 2$. Αλλά, $h'(x) = f'(x), \forall x \in [\alpha, \beta]$ και αρα $2 = h'(\xi_2) = f'(\xi_2)$. Συνεπώς, υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε να ισχύει $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 4$.