Ενότητα IV - Σειρές (πραγματικών αριθμών)

Λύσεις των ασκήσεων

(1) Να υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{k=1}^{7} 2k$.

Απάντηση.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{7} 2k &= (2\cdot 1)+(2\cdot 2)+(2\cdot 3)+(2\cdot 4)+(2\cdot 5)+(2\cdot 6)+(2\cdot 7)\\ &= 2+4+6+8+10+12+14\\ &= 56.\end{aligned}$$

■

(2) Να υπολογίσετε τα αθροίσματα $\sum_{k=1}^{5} 2$ και $\sum_{k=1}^{1} 7$.

Απάντηση.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5} 2 &= 2+2+2+2+2=5\cdot 2 = 10\\ \sum_{k=1}^{1} 7 &= 7.\end{aligned}$$

■

(3) Να υπολογίστε το μερικό άθροισμα της σειράς $\sum_{k=1}^{+\infty}(2k-1)$.

Απάντηση.

Έστω $\nu \in \mathbb{N}$ σταθεροποιημένο. Τότε

$$\begin{aligned}S_\nu = \sum_{k=1}^{\nu}(2k-1) &= 2\sum_{k=1}^{\nu} k - \sum_{k=1}^{\nu} 1 = 2\cdot\frac{\nu(\nu+1)}{2} - \nu = \nu(\nu+1)-\nu\\ &= \nu^2.\end{aligned}$$

■

(4) Να βρείτε το γενικό όρο μιας ακολουθίας $(a_\nu)_\nu$, αν γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των ν πρώτων όρων της είναι ίσο με 2^ν.

Απάντηση.

Έστω $\nu \in \mathbb{N}$ σταθεροποιημένο. Είναι $S_\nu = 2^\nu$. Τότε

$$a_\nu = S_{\nu+1} - S_\nu = 2^{\nu+1} - 2^\nu = 2\cdot 2^\nu - 2^\nu = 2^\nu.$$

■

(5) Δίνεται ότι $\displaystyle\sum_{k=1}^{30} a_k = 100$ και $\displaystyle\sum_{k=1}^{30} b_k = 50$. Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{30}(4a_k - 5b_k).$$

Απάντηση.

$$\sum_{k=1}^{30}(4a_k - 5b_k) \quad = \quad 4\sum_{k=1}^{30} a_k - 5\sum_{k=1}^{30} b_k \quad = \quad 4\cdot 100 - 5\cdot 50 \quad = \quad 150.$$

■

(6) Δίνεται η ακολουθία $(a_\nu)_\nu$ με γενικό όρο $a_\nu = \dfrac{1}{\nu^2+9\nu+20}$. Να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή μπορεί να γραφεί στη μορφή $\beta_\nu - \beta_{\nu+1}$, όπου $(\beta_\nu)_\nu$ κατάλληλη ακολουθία. Στη συνέχεια, να υπολογιστεί το άθροισμα $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} a_k$.

Απάντηση.

Έστω $\nu \in \mathbb{N}$ σταθεροποιημένο. Είναι

$$a_\nu \quad = \quad \frac{1}{\nu^2+9\nu+20} \quad = \quad \frac{1}{(\nu+4)(\nu+5)}.$$

Ανάλυση σε άθροισμα απλών κλασμάτων δίνει:

$$\frac{1}{(\nu+4)(\nu+5)} \quad = \quad \frac{1}{\nu+4} - \frac{1}{\nu+5} \quad = \quad \frac{1}{\nu+4} - \frac{1}{(\nu+4)+1}.$$

Έτσι, η ακολουθία που ψάχνουμε είναι η $(\beta_\nu)_\nu$ με γενικό όρο

$$\beta_\nu = \frac{1}{\nu+4}.$$

Τώρα[9],

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{20} a_k \quad &= \quad \sum_{k=1}^{20}(\beta_\nu - \beta_{\nu+1}) \quad = \quad \sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{\nu+4} - \frac{1}{\nu+5}\right) \\
&= \quad \left(\frac{1}{1+4} - \frac{1}{1+5}\right) + \left(\frac{1}{2+4} - \frac{1}{2+5}\right) + \left(\frac{1}{3+4} - \frac{1}{3+5}\right) + \ldots + \\
&\quad + \left(\frac{1}{19+4} - \frac{1}{19+5}\right) + \left(\frac{1}{20+4} - \frac{1}{20+5}\right) \\
&= \quad \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{23} - \frac{1}{24}\right) + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{25}\right) \\
&= \quad \frac{1}{5} - \frac{1}{25} \quad = \quad \frac{4}{25}.
\end{aligned}$$

■

(7) Να εξετάσετε αν οι πιο κάτω σειρές συγκλίνουν και στην περίπτωση που αυτές συγκλίνουν, να υπολογιστεί το άθροισμά τους:

$$\text{(i)}\ \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k, \quad \text{(ii)}\ \sum_{k=1}^{+\infty}(3k+1), \quad \text{(iii)}\ \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k.$$

[9] Πρόκειται για τηλεσκοπικό άθροισμα.

Απάντηση.

(i) $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$.

Υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα S_ν της σειράς. Παρατηρούμε ότι έχουμε άθροισμα ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με $a_1 = \frac{1}{3}$ και λόγο $\lambda = \frac{1}{3}$. Επομένως[10] ,

$$S_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{\frac{1}{3}(1-\left(\frac{1}{3}\right)^\nu)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^\nu}\right)$$

και άρα[11]

$$\lim_{\nu\to\infty} S_\nu = \frac{1}{2}\lim_{\nu\to\infty}\left(1-\frac{1}{3^\nu}\right) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}.$$

Συνεπώς, η σειρά **συγκλίνει** στον αριθμό $\frac{1}{2}$, δηλαδή

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{2}.$$

(ii) $\sum_{k=1}^{+\infty}(3k+1)$.

Υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα S_ν της σειράς[12].

$$S_\nu = \sum_{k=1}^{\nu}(3k+1) = 3\sum_{k=1}^{\nu}k + \sum_{k=1}^{\nu}1 = 3\cdot\frac{\nu(\nu+1)}{2} + \nu = \frac{3}{2}\nu^2 + \frac{5}{2}\nu$$

και άρα

$$\lim_{\nu\to\infty} S_\nu = \lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{3}{2}\nu^2 + \frac{5}{2}\nu\right) = +\infty.$$

Συνεπώς, η σειρά **αποκλίνει**.

(iii) $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k$.

Είναι το παράδειγμα 1 (γ) στη σελ. 69 του σχολικού τεύχους Β. Η λύση που δίνεται είναι η εξής: Υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα της σειράς:

$$\begin{aligned} S_\nu &= \sum_{k=1}^{\nu}(-1)^k = (-1)+(-1)+(-1)+(-1)+\ldots+(-1)^\nu \\ &= \begin{cases} -1, & \nu \text{ περιττός} \\ 1, & \nu \text{ άρτιος} \end{cases}. \end{aligned}$$

Επομένως, καθώς το ν τείνει στο άπειρο, το S_ν δεν υπάρχει, γιατί η τιμή του κυμαίνεται στους δύο αριθμούς -1 και 0. Άρα, η σειρά δεν συγκλίνει.

Αυτό όμως δεν αποτελεί μια αυστηρή Μαθηματική απόδειξη. Το ότι 'η τιμή του κυμαίνεται στους δύο αριθμούς -1 και 0', δηλαδή εναλλάσσεται μεταξύ των δύο αυτών αριθμών αποκτά νόημα με την έννοια της υπακολουθίας και το αντικείμενο αυτό ίσως να μην εμπίπτει στα σχολικά πλαίσια και γενικότετα στους διδακτικούς στόχους του αναλυτικού προγράμματος. ■

[10] Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου $(a_\nu)_\nu$ με λόγο λ είναι

$$\sum_{k=1}^{\nu} a_k = \begin{cases} \frac{a_1(1-\lambda^\nu)}{1-\lambda}, & \lambda \neq 1 \\ \nu \cdot a_1, & \lambda = 1 \end{cases}.$$

[11] Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι αν $a \in (-1,1)$, τότε $\lim_{\nu\to\infty} a^\nu = 0$.

Άρα, $\lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^\nu = 0$.

[12] $\sum_{k=1}^{\nu} k = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$.

(8) Να υπολογίσετε το μερικό άθροισμα S_ν της σειράς $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(6k^2-2k+3)$.

Απάντηση.

Έστω $\nu \in \mathbb{N}$ σταθεροποιημένο. Είναι

$$\begin{aligned} S_\nu &= \sum_{k=1}^{\nu}(6k^2-2k+3) = 6\sum_{k=1}^{\nu}k^2 - 2\sum_{k=1}^{\nu}k + 3\sum_{k=1}^{\nu}1 \\ &= 6\cdot\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} - 2\frac{\nu(\nu+1)}{2} + 3\nu \\ &= \nu(\nu+1)(2\nu+1) - \nu(\nu+1) + 3\nu \\ &= \nu(2\nu^2+2\nu+3). \end{aligned}$$

■

(9) Να υπολογίστε το άθροισμα $\displaystyle\sum_{k=11}^{20}(k^2-2k+1)$.

Απάντηση.

Είναι

$$\sum_{k=11}^{20}(k^2-2k+1) = \sum_{k=1}^{20}(k^2-2k+1) - \sum_{k=1}^{10}(k^2-2k+1).$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20}(k^2-2k+1) &= \sum_{k=1}^{20}k^2 - 2\sum_{k=1}^{20}k + \sum_{k=1}^{20}1 \\ &= \frac{20(20+1)(2\cdot 20+1)}{6} - 2\frac{20(20+1)}{2} + 20 \\ &= 2470 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10}(k^2-2k+1) &= \sum_{k=1}^{10}k^2 - 2\sum_{k=1}^{10}k + \sum_{k=1}^{10}1 \\ &= \frac{10(10+1)(2\cdot 10+1)}{6} - 2\frac{10(10+1)}{2} + 10 \\ &= 285. \end{aligned}$$

Έτσι,

$$\sum_{k=11}^{20}(k^2-2k+1) = 2470 - 285 = 2185.$$

■

(10) Να υπολογίσετε το άθροισμα
$$1^3+2^3+3^3+\ldots+30^3.$$

Απάντηση.

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+30^3 = \sum_{k=1}^{30} k^3 = \frac{30^2\cdot(30+1)^2}{4} = 216225.$$

■

(11) Να υπολογίσετε το μερικό άθροισμα S_ν της σειράς
$$2\cdot 5+3\cdot 7+4\cdot 9+\ldots.$$

Απάντηση.

Η ακολουθία
$$2,\ 3,\ 4,\ldots$$
είναι μια αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\delta=1$ και πρώτο όρο $a_1=1$ και ο γενικός της όρος είναι ο $a_k=a_1+(k-1)\cdot\delta=k$.
Η ακολουθία
$$5,\ 7,\ 9,\ \ldots$$
είναι μια αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\delta=2$ και πρώτο όρο $b_1=5$ και ο γενικός της όρος είναι ο $b_k=b_1+(k-1)\cdot\delta=2k+3$.
Συνεπώς,
$$2\cdot 5+3\cdot 7+4\cdot 9+\ldots = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\cdot b_k = \sum_{k=1}^{+\infty} k(2k+3) = \sum_{k=1}^{+\infty}(2k^2+3k).$$

Το μερικό άθροισμα S_ν της σειράς αυτής είναι
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\nu}(2k^2+3k) &= 2\sum_{k=1}^{\nu}k^2+3\sum_{k=1}^{\nu}k\\ &= 2\cdot\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}+3\cdot\frac{\nu(\nu+1)}{2}\\ &= \nu(\nu+1)\left(\frac{2\nu+1}{3}+\frac{3}{2}\right)\\ &= \frac{1}{6}\nu(\nu+1)(4\nu+11).\end{aligned}$$

■

(12) Να εξετάσετε αν συγκλίνει η πιο κάτω σειρά και στην περίπτωση που αυτή συγκλίνει, να υπολογίσετε το άθροισμά της:
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+4)(k+5)}.$$

Απάντηση.

Στην άσκηση 6 είδαμε ότι
$$\frac{1}{(k+4)(k+5)} = \frac{1}{k+4}-\frac{1}{k+5},\quad \forall k\in\mathbb{N}$$

και άρα η σειρά είναι τηλεσκοπική. Το μερικό της άθροισμα είναι

$$\begin{aligned} S_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{(k+4)(k+5)} &= \sum_{k=1}^{\nu} \left(\frac{1}{k+4} - \frac{1}{k+5} \right) \\ &= \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8} \right) + \ldots + \\ &\quad + \left(\frac{1}{\nu+3} - \frac{1}{\nu+4} \right) + \left(\frac{1}{\nu+4} - \frac{1}{\nu+5} \right) \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{\nu+5}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\lim_{\nu\to+\infty} S_\nu = \lim_{\nu\to+\infty} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{\nu+5} \right) = \frac{1}{5} + \lim_{\nu\to+\infty} \frac{1}{\nu+5} = \frac{1}{5},$$

και άρα η σειρά συγκλίνει στον αριθμό $\frac{1}{5}$, δηλαδή

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+4)(k+5)} = \frac{1}{5}.$$

■

(13) Δίνεται ότι το μερικό άθροισμα της σειράς

$$\frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 9} + \ldots$$

είναι ίσο με $\dfrac{\nu}{3(2\nu+3)}$. Να εξετάσετε αν η σειρά συγκλίνει.

Απάντηση.

Από τα δεδομένα της άσκησης, είναι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ είναι

$$S_\nu = \frac{\nu}{3(2\nu+3)}.$$

Τότε

$$\lim_{\nu\to+\infty} S_\nu = \lim_{\nu\to+\infty} \frac{\nu}{3(2\nu+3)} = \lim_{\nu\to+\infty} \frac{\nu}{6\nu+9} = \lim_{\nu\to+\infty} \frac{\nu}{6\nu} = \frac{1}{6}$$

και άρα η σειρά συγκλίνει στον αριθμό $\frac{1}{6}$, δηλαδή

$$\frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 9} + \ldots = \frac{1}{6}.$$

■