ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ Α′ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ 24/01/2022-Α′ ΣΕΙΡΑ [**Β ΤΑΞΗΣ** ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΤΕΣΕΚ] -ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ-

Μέρος Α

A1

Να λύσετε την εξίσωση:

$$|x+2| = 7.$$

Απάντηση

$$\begin{aligned} |x+2| = 7 &\iff x+2 = \pm 7 \\ &\iff (x+2=7) \vee (x+2=-7) \\ &\iff (x=5) \vee (x=-9). \end{aligned}$$

■

A2

Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\text{συν}2a + \text{ημ}4a}{1 - \text{συν}4a + \text{ημ}2a} = \text{σφ}2a.$$

Απάντηση

Θέλουμε να 'διώξουμε' τους τριγωνομετρικούς όρους που έχουν όρισμα $4a$. Χρησιμοποιούμε λοιπόν τους τύπους (βλέπε τυπολόγιο)

$$\text{ημ}2a = 2\text{ημ}a\text{συν}a \qquad \text{και} \qquad \frac{1-\text{συν}2a}{2} = \text{ημ}^2 a$$

οι οποίοι δίνουν:

$$\text{ημ}4a = 2\text{ημ}2a\text{συν}2a \qquad \text{και} \qquad 1 - \text{συν}4a = 2\text{ημ}^2 2a.$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{Α}' \text{ μέλος} &= \frac{\text{συν}2a + \text{ημ}4a}{1 - \text{συν}4a + \text{ημ}2a} = \frac{\text{συν}2a + 2\text{ημ}2a\text{συν}2a}{2\text{ημ}^2 2a + \text{ημ}2a} \\ &= \frac{\text{συν}2a(1+2\text{ημ}2a)}{\text{ημ}2a(1+2\text{ημ}2a)} = \frac{\text{συν}2a}{\text{ημ}2a} \\ &= \text{σφ}2a = \text{Β}' \text{ μέλος}. \end{aligned}$$

■

A3

(α′) Να διατυπώσετε τον ορισμό της άρτιας συνάρτησης.

(β′) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ είναι άρτια.

Απάντηση

(α΄) Ορισμός άρτιας συνάρτησης **(Βλέπε σχολικό τεύχος Α, σελ. 108)**
Μια συνάρτηση $f : A \to B$ λέγεται **άρτια**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$.

(β΄) Πρέπει πρώτα να βρούμε το πεδίο ορισμού $D(f)$ της f :

$$\begin{aligned} D(f) &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ 1 - x^2 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 - 1 \leq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ (x-1)(x+1) \leq 0\}. \end{aligned}$$

Λύνουμε την ανίσωση $(x-1)(x+1) \leq 0$:

$$(x-1)(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Άρα

$$D(f) = [-1, 1].$$

Έστω τώρα $x \in [-1, 1]$. Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:
- $x \in [-1, 0] \Rightarrow -1 \leq x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -x \leq 1 \Rightarrow -x \in [-1, 1]$
- $x \in (0, 1] \Rightarrow 0 < x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x < 0 \Rightarrow -x \in [-1, 1]$.

Τέλος, για $x \in [-1, 1]$,

$$f(-x) = \sqrt{1 - (-x)^2} = \sqrt{1 - x^2} = f(x).$$

Άρα, η f είναι άρτια συνάρτηση. ■

A4

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = x - \frac{1}{x}$.
Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f + g$ και $f \circ g$, δίνοντας τους τύπους τους στην πιο απλή μορφή.

Απάντηση

Είναι $D(f) = \mathbb{R} - \{0\} = D(g)$.
Άρα, $D(f+g) = D(f) \cap D(g) = \mathbb{R} - \{0\}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x} + x - \frac{1}{x} = x.$$

Τώρα,

$$\begin{aligned} D(f \circ g) &= \{x \in D(g) \ : \ g(x) \in D(f)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} - \{0\} \ : \ x - \frac{1}{x} \neq 0\}. \end{aligned}$$

Είναι

$$x - \frac{1}{x} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1.$$

Άρα,

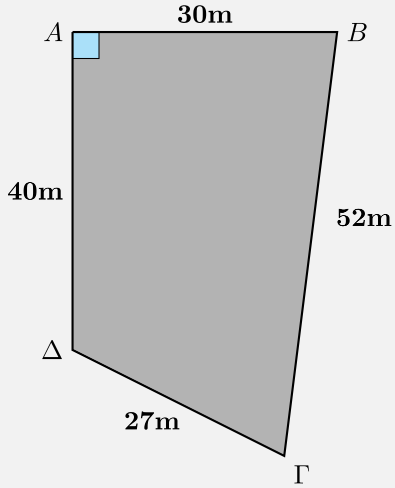
$$D(f \circ g) = \mathbb{R} - \{0, \pm 1\}$$

και για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0, \pm 1\}$,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x - \frac{1}{x}} = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

A5

Πιο κάτω δίνεται ένα τεμάχιο γης σε σχήμα τετραπλεύρου ΑΒΓΔ με ΑΒ=30m, ΒΓ=52m, ΓΔ=27m, ΑΔ=40m και $\hat{A} = 90°$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τεμαχίου γης.



Απάντηση

Φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ. Τότε,

$$E(\text{ΑΒΓΔ}) = E(\triangle\text{ΑΒΔ}) + E(\triangle\text{ΒΔΓ}).$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο (ορθογώνιο) τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

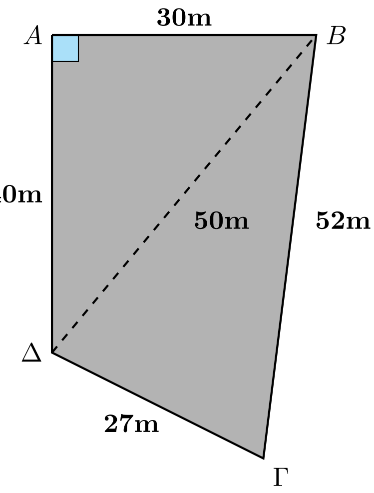
$$\begin{aligned}(\text{ΒΔ})^2 = (\text{ΑΒ})^2 + (\text{ΑΔ})^2 \quad &\Rightarrow \quad (\text{ΒΔ})^2 = (40)^2 + (30)^2 = 2500 \\ &\Rightarrow \quad (\text{ΒΔ}) = \sqrt{2500} = 50m.\end{aligned}$$

Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΒΔΓ,

$$\begin{aligned}\text{συν}\hat{\Gamma} \quad &= \quad \frac{(\Delta\Gamma)^2 + (\Gamma\text{Β})^2 - (\text{Β}\Delta)^2}{2(\Delta\Gamma)(\Gamma\text{Β})} \\ &= \quad \frac{(27)^2 + (52)^2 - 2500}{2 \times 27 \times 52} \\ &= \quad \frac{729 + 2704 - 2500}{2808} \;=\; \frac{933}{2808} \;=\; 0.3322 \\ & \quad\quad \text{(κάντε χρήση της υπολογιστικής μηχανής)} \\ \Rightarrow \hat{\Gamma} \quad &\approx \quad 70.6°\end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned} E(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) &= E(\triangle\mathrm{AB\Delta}) + E(\triangle\mathrm{B\Delta\Gamma}) \\ &= \frac{(\mathrm{AB})\times(\mathrm{A\Delta})}{2} + \frac{(\mathrm{\Delta\Gamma})\times(\mathrm{B\Gamma})\times \text{ημ}\hat{\Gamma}}{2} \\ &= \frac{(30)\times(40)}{2} + \frac{(27)\times(52)\times \text{ημ}70.6^\circ}{2} \\ &= 600 + 699.41 \;=\; 1299.41. \end{aligned}$$



■

Α6

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{|3-x| - x^2 + 9}{2x^2 - 6x}.$$

Να υπολογίσετε τα όρια:
(α) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ και (β) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

Απάντηση

Είναι (θυμηθείτε ότι $|a-b| = |b-a|$)

$$f(x) = \frac{|3-x| - x^2 + 9}{2x^2 - 6x} = \frac{|x-3| - (x^2-9)}{2x(x-3)} = \frac{|x-3| - (x-3)(x+3)}{2x(x-3)}$$

και άρα $D(f) = \mathbb{R} - \{0, 3\}$. Επίσης, είναι τμηματικού τύπου:
για $x > 3 \Rightarrow x-3 > 0 \Rightarrow |x-3| = x-3$ και για $x < 3 \Rightarrow x-3 < 0 \Rightarrow |x-3| = -(x-3)$. Συνεπώς,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3-(x-3)(x+3)}{2x(x-3)}, & x > 3 \\[2ex] \dfrac{-(x-3)-(x-3)(x+3)}{2x(x-3)}, & x < 3,\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(x-3)[1-(x+3)]}{2x(x-3)}, & x > 3 \\ \\ \dfrac{-(x-3)[1+(x+3)]}{2x(x-3)}, & x < 3,\ x \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{-2-x}{2x}, & x > 3 \\ \\ \dfrac{-x-4}{2x}, & x < 3,\ x \neq 0 \end{cases}$$

Είναι τότε

(α)

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{-2-x}{2x} = \frac{-2-3}{2 \times 3} = -\frac{5}{6}$$

και

(β)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x-4}{2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

■

-ΤΕΛΟΣ Α ΜΕΡΟΥΣ-

Μέρος Β

Β1

(α΄) Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$2\text{ημ}a\text{συν}\beta = \text{ημ}(a+\beta) + \text{ημ}(a-\beta).$$

(β΄) Να λύσετε την εξίσωση

$$\text{ημ}10x\text{συν}6x = \text{ημ}18x\text{συν}2x$$

στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Απάντηση

(α΄) Χρησιμοποιούμε τον πρώτο τύπο του τυπολογίου:

$$\text{ημ}(A \pm B) = \text{ημ}A\text{συν}B \pm \text{συν}A\text{ημ}B.$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\text{Β΄ μέλος} &= \text{ημ}(a+\beta) + \text{ημ}(a-\beta)\\
&= \text{ημ}a\text{συν}\beta + \text{ημ}\beta\text{συν}a + \text{ημ}a\text{συν}\beta - \text{συν}a\text{ημ}\beta\\
&= \text{ημ}a\text{συν}\beta + \text{ημ}a\text{συν}\beta\\
&= 2\text{ημ}a\text{συν}\beta\\
&= \text{Α΄ μέλος}.
\end{aligned}$$

(β΄) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα που αποδείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα:

$$\begin{aligned}
\text{ημ}10x\text{συν}6x = \text{ημ}18x\text{συν}2x \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}[\text{ημ}(10x+6x) + \sin(10x-6x)]\\
&\qquad = \frac{1}{2}[\text{ημ}(18x+2x) + \text{ημ}(18x-2x)]\\
&\Leftrightarrow \quad \text{ημ}(16x) + \text{ημ}(4x) = \text{ημ}(20x) + \text{ημ}(16x)\\
&\Leftrightarrow \quad \text{ημ}(4x) = \text{ημ}(20x).
\end{aligned}$$

Τώρα, υπάρχουν δύο τρόποι επίλυσης της πιο πάνω εξίσωσης (στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$): είτε χρησιμοποιώντας τύπο από το τυπολόγιό μας:

$$\begin{aligned}
\text{ημ}(4x) = \text{ημ}(20x) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{ημ}(4x) - \text{ημ}(20x) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad 2\text{ημ}\frac{4x-20x}{2} \cdot \text{συν}\frac{4x+20x}{2} = 0\\
&\Leftrightarrow \quad 2\text{ημ}\frac{-16x}{2} \cdot \text{συν}\frac{24x}{2} = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \text{ημ}(-8x) \cdot \text{συν}(12x) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad -\text{ημ}(8x) \cdot \text{συν}(12x) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \text{ημ}(8x) \cdot \text{συν}(12x) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad (\text{ημ}(8x) = 0) \vee (\text{συν}(12x) = 0)
\end{aligned}$$

και τότε θα πρέπει να λύσουμε τις εξισώσεις (στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$),
είτε ως εξής:

$$\text{ημ}(20x) = \text{ημ}(4x) \Longleftrightarrow \begin{cases} 20x = 2k\pi + 4x \\ 20x = 2k\pi + \pi - 4x \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z},$$

δηλαδή

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{k\pi}{8} \\ x = \dfrac{k\pi}{12} + \dfrac{\pi}{24} \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Για $k = 1$ η πρώτη δίνει $x = \frac{\pi}{8}$ και η δεύτερη για $k = 0, 1$ και $k = 2$ δίνει $x = \frac{\pi}{24}$, $\frac{\pi}{8}$ και $\frac{5\pi}{24}$ αντίστοιχα. Για τις υπόλοιπες τιμές του $k \in \mathbb{Z}$ βγαίνουμε εκτός του διαστήματος $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.
Τελικά,

$$x = \frac{\pi}{24},\ \frac{\pi}{8},\ \frac{5\pi}{24}.$$

■

B2

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x + \beta, & -1 \le x < 2 \\ \\ -2x + \gamma, & 2 \le x \le 5 \end{cases}.$$

(α΄) Να υπολογίσετε τις τιμές των $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να περνά από το σημείο $(1, 3)$ και η f να είναι συνεχής στο σημείο $x = 2$.

(β΄) Αν $\beta = 2$ και $\gamma = 8$, να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

Απάντηση

(α΄) Είναι $D(f) = [-1, 5]$.
Η υπόθεση 'η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να περνά από το σημείο $(1, 3)$' είναι ισοδύναμη με το ότι $f(1) = 3$.
Είναι

$$f(1) = 3 \Leftrightarrow 1 + \beta = 3 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 2}\,.$$

Η υπόθεση ' η f να είναι συνεχής στο σημείο $x = 2$' είναι ισοδύναμη με το

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2).$$

Το πιο πάνω όριο υπάρχει αν και μόνο αν τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to 2^-}(x+\beta) = \lim_{x\to 2^+}(-2x+\gamma) \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to 2^-}(x+2) = \lim_{x\to 2^+}(-2x+\gamma) \\ &\Leftrightarrow \quad 2+2 = -2\cdot 2 + \gamma \\ &\Leftrightarrow \quad \boxed{\gamma = 8}\,. \end{aligned}$$

(β΄) Για $\beta = 2$ και $\gamma = 8$,

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & -1 \le x < 2 \\ \\ -2x + 8, & 2 \le x \le 5 \end{cases}.$$

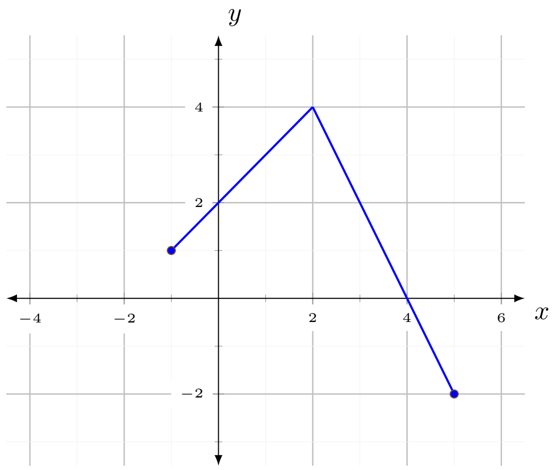
Έχουμε:

$$-1 \le x < 2 \Rightarrow -1+2 \le x+2 < 2+2 \Rightarrow 1 \le \underbrace{x+2}_{f(x)} < 4$$

και

$$2 \le x \le 5 \Rightarrow -5 \le -x \le -2 \Rightarrow -10 \le -2x \le -4 \Rightarrow -2 \le \underbrace{-2x+8}_{f(x)} \le 4.$$

Άρα, το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το διάστημα $[-2, 4]$.



$$f(x) = \begin{cases} x+2, & -1 \le x < 2 \\ -2x+8, & 2 \le x \le 5 \end{cases}.$$

■

B3

Δίνεται η συνάρτηση $f : A \to f(A)$ με τύπο $f(x) = 1 - \sqrt{x}$.

(α΄) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

(β΄) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση, f^{-1}.

(γ΄) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{f^{-1}}{f}$.

(δ΄) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 1}\left[\left(\frac{f^{-1}}{f}\right)(x)\right]$.

Απάντηση

(α΄) Η f είναι η διαφορά των συναρτήσεων $g(x) = 1$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και της $h(x) = \sqrt{x}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, +\infty)$.
Συνεπώς

$$D(f) = [0, +\infty).$$

Τωρα,

$$x \ge 0 \Rightarrow \sqrt{x} \ge 0 \Rightarrow -\sqrt{x} \le 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{x} \le 1$$

και άρα

$$R(f) = f(A) = f([0, +\infty) = (-\infty, 1].$$

Σημείωση: Με αυτά που έχετε διδαχθεί, μπορείτε να χαράξετε (έσω τη μορφή) τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f : αποτελεί μετατόπιση κατά μια μονάδα προς τα πάνω της γραφικής παράστασης της (γνωστής) συνάρτησης $h(x) = \sqrt{x}$.

(β΄) Η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to f([0, +\infty)) = (-\infty, 1]$ είναι επί. Θα δείξουμε ότι είναι και 1-1:
Έστω (τυχόντα) $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ με $f(x_1) = f(x_2)$.
Είναι

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 1 - \sqrt{x_1} = 1 - \sqrt{x_2} \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

(στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η συνάρτηση $h(x) = \sqrt{x}$ είναι 1-1).
Αφού τα x_1 και x_2 ήταν τυχόντα, η f είναι 1-1.
Συνεπώς, αφού η f είναι 1-1 και επί (του συνόλου $(-\infty, 1]$), αυτή αντιστρέφεται.
Θα προσδιορίσουμε την αντίστροφή της, την f^{-1} : για $x \geq 0$,

$$y = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = 1 - y \Rightarrow x = (1 - y)^2.$$

Άρα, $f^{-1} : (-\infty, 1] \to [0, +\infty)$ με

$$f^{-1}(x) = (1 - x)^2 = (x - 1)^2.$$

(γ΄) Το πεδίο ορισμού $D\left(\frac{f^{-1}}{f}\right)$ της συνάρτησης $\frac{f^{-1}}{f}$ είναι το κοινό πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και f^{-1} πλην των σημείων στα οποία μηδενίζεται η συνάρτηση f. Δηλαδή:

$$D\left(\frac{f^{-1}}{f}\right) \quad = \quad \{x \in D(f) \cap D(f^{-1}) \ : \ f(x) \neq 0\}.$$

Είναι

$$D(f) \cap D(f^{-1}) = [0, +\infty) \cap (-\infty, 1] = [0, 1]$$

και

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow 1 - \sqrt{x} = 0 \Longleftrightarrow 1 = \sqrt{x} \Longleftrightarrow x = 1.$$

Συνεπώς,

$$D(f) \cap D(f^{-1}) = [0, 1] - \{1\} = [0, 1)$$

και για $x \in [0, 1)$,

$$\left(\frac{f^{-1}}{f}\right)(x) = \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \frac{(x - 1)^2}{1 - \sqrt{x}}.$$

(δ΄)

$$\lim_{x \to 1} \left[\left(\frac{f^{-1}}{f}\right)(x)\right] \quad = \quad \lim_{x \to 1} \frac{(1 - x)^2}{1 - \sqrt{x}}$$

το οποίο αποτελεί απροσδιόριστη μορφή τύπου $\frac{0}{0}$.
Έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{(1 - x)^2}{1 - \sqrt{x}} &= \lim_{x \to 1} \frac{(1 - x) \cdot (1 - x)}{1 - \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{(1 - \sqrt{x}) \cdot (1 + \sqrt{x}) \cdot (1 - x)}{1 - \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \to 1} (1 + \sqrt{x}) \cdot (1 - x) \\ &= (1 + \sqrt{1}) \cdot (1 - 1) \ = \ 0. \end{aligned}$$

■

-ΤΕΛΟΣ Β ΜΕΡΟΥΣ-