

Μέρος II - Αντίστροφες Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Δραστηριότητες σελ. 120 (Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις)

1. (α) $\text{τοξ}\eta\mu\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ αφού $\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (β) $\text{τοξ}\sigma\upsilon\nu(1) = 0$ αφού $\sigma\upsilon\nu(0) = 1$
 (γ) $\text{τοξ}\varepsilon\varphi(1) = \frac{\pi}{4}$ αφού $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ (δ) $\text{τοξ}\eta\mu\left(\eta\mu\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$ αφού $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Παρατηρήστε ότι $\eta\mu\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$(\varepsilon) \text{τοξ}\eta\mu\left(\frac{1}{2}\right) = \theta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\text{τοξ}\eta\mu\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \sigma\upsilon\nu\theta$$

Αφού το πεδίο τιμών της $\text{τοξ}\eta\mu$ είναι το διάστημα $[-1, 1]$, τότε αφού $\frac{1}{2} > 0$, έπεται ότι $\theta \in (0, 1]$. Η υποτείνουσα του αντίστοιχου ορθογωνίου τριγώνου είναι 2 και η απέναντι ίση με 1. Τότε, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα, η προσκείμενη θα είναι $\sqrt{3}$. Έτσι,

$$\sigma\upsilon\nu\left(\text{τοξ}\eta\mu\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(\sigma\tau) \eta\mu(2\text{τοξ}\varepsilon\varphi\sqrt{2}): \text{Έχουμε } 2\text{τοξ}\varepsilon\varphi\sqrt{2} = \theta \Leftrightarrow \text{τοξ}\varepsilon\varphi\sqrt{2} = \frac{\theta}{2} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{2}.$$

Άρα,

$$\eta\mu(2\text{τοξ}\varepsilon\varphi\sqrt{2}) = \eta\mu\theta = \frac{2\varepsilon\varphi\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + \varepsilon\varphi^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{1 + 2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

2. (α) $\eta\mu\left(\text{τοξ}\sigma\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$. Θέτουμε $\text{τοξ}\sigma\varphi\left(-\frac{1}{2}\right) = \theta \Leftrightarrow \sigma\varphi\theta = -\frac{1}{2}$.

Αφού το σύνολο τιμών της $\text{τοξ}\sigma\varphi$ είναι το διάστημα $(0, \pi)$, τότε αφού $-\frac{1}{2} < 0$, έπεται ότι $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Έτσι,

$$\sigma\varphi^2\theta + 1 = \sigma\tau\epsilon\mu^2\theta \Leftrightarrow \sigma\tau\epsilon\mu\theta = \sqrt{\sigma\varphi^2\theta + 1}$$

(αφού $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \sigma\tau\epsilon\mu\theta > 0$) και τελικά,

$$\sigma\tau\epsilon\mu\theta = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

και άρα

$$\eta\mu\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$(\beta) \sigma\upsilon\nu\left(\text{τοξ}\sigma\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)\right). \text{Θέτουμε } \text{τοξ}\sigma\varphi\left(-\frac{1}{2}\right) = \theta \Leftrightarrow \sigma\varphi\theta = -\frac{1}{2}.$$

Αφού το πεδίο τιμών της $\text{τοξ}\sigma\varphi$ είναι το διάστημα $(0, \pi)$, τότε αφού $-\frac{1}{2} < 0$, έπεται ότι $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Έτσι,

$$\sigma\varphi^2\theta + 1 = \sigma\tau\epsilon\mu^2\theta \Leftrightarrow \sigma\tau\epsilon\mu^2\theta = \frac{5}{4}$$

Συνεπώς, από την ταυτότητα $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$ (και αφού $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta < 0$) λαμβάνουμε

$$\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

3. Κατ'αρχάς, το κοινό πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $x \mapsto \text{τοξ}\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ και $x \mapsto \text{τοξ}\varepsilon\varphi(x)$ είναι το $\mathbb{R}_*$. Θα δείξουμε ισοδύναμα ότι

$$\operatorname{tox}\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{tox}\varepsilon\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0 \end{cases}$$

► Έστω πρώτα ότι $x > 0$. Τότε, θέτουμε $\operatorname{tox}\varepsilon\varphi(x) = \theta$ ($x > 0$) $\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta = x$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $\operatorname{tox}\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi$ ($x > 0$) $\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\varphi = \frac{1}{x}$, $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Χρησιμοποιώντας γνωστή μας ταυτότητα² έχουμε

$$\sigma\varphi(\theta + \varphi) = \frac{\sigma\varphi\theta \cdot \sigma\varphi\varphi - 1}{\sigma\varphi\theta + \sigma\varphi\varphi}, \text{ δηλ. } \sigma\varphi(\theta + \varphi) = \frac{\sigma\varphi\theta \cdot \sigma\varphi\varphi - 1}{\sigma\varphi\theta + \sigma\varphi\varphi} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1}{x + \frac{1}{x}} = 0$$

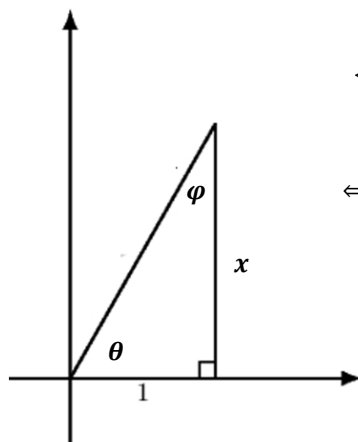
και αρα αφού $(\theta + \varphi) \in (0, \pi)$, έχουμε ότι $\theta + \varphi = \frac{\pi}{2} = \operatorname{tox}\sigma\varphi 0$, δηλ.

$$\operatorname{tox}\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{tox}\varepsilon\varphi(x) = \frac{\pi}{2}$$

Διαφορετικά, θέτουμε $\operatorname{tox}\varepsilon\varphi(x) = \theta$ ($x > 0$) $\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta = x$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και αν $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$, τότε $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $\varepsilon\varphi\varphi = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sigma\varphi\theta = \frac{1}{x}$. Έτσι,

$$\operatorname{tox}\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{tox}\varepsilon\varphi(x) = \theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Το πιο κάτω σχήμα μας δίνει να καταλάβουμε τη συμμετρία και τη λογική των πιο πάνω τρόπων:



$$\begin{cases} \operatorname{tox}\varepsilon\varphi(x) = \theta \\ \operatorname{tox}\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon\varphi(\theta) = x \\ \varepsilon\varphi(\varphi) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\theta + \varphi}_{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{tox}\varepsilon\varphi(x) + \operatorname{tox}\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$$

► Για την περίπτωση που $x < 0$, δουλεύουμε εντελώς όμοια και ευρίσκουμε

$$\operatorname{tox}\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{tox}\varepsilon\varphi(x) = -\frac{\pi}{2}$$

ή χρησιμοποιώντας το ότι $\operatorname{tox}\varepsilon\varphi(-x) = -\operatorname{tox}\varepsilon\varphi(x)$.

4. Θα υπολογίσουμε το $\eta\mu(\operatorname{tox}\varepsilon\varphi(x))$ συναρτήσει του x .

► Έστω πρώτα ότι $x > 0$. Τότε, θέτουμε $\operatorname{tox}\varepsilon\varphi(x) = \theta$ ($x > 0$) $\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta = x$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ευρίσκουμε έκφραση του $\eta\mu\theta$ είτε με το τριγωνάκι το οποίο θα έχει υποτείνουσα $\sqrt{1+x^2}$ και προσκείμενη πλευρά της γωνίας θ την $|x| = x$, είτε με τριγωνομετρικούς χειρισμούς: από τη γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\eta\mu^2\theta = \frac{\varepsilon\varphi^2\theta}{1 + \varepsilon\varphi^2\theta}$$

και το ότι $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \eta\mu\theta > 0$, έχουμε ότι

$$\eta\mu(\operatorname{tox}\varepsilon\varphi(x)) = \eta\mu\theta = \sqrt{\frac{\varepsilon\varphi^2\theta}{1 + \varepsilon\varphi^2\theta}} = \sqrt{\frac{x^2}{1 + x^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \quad (\text{αφού } x > 0)$$

► Για την περίπτωση που $x < 0$, δουλεύουμε εντελώς όμοια και ευρίσκουμε (πάλιν)

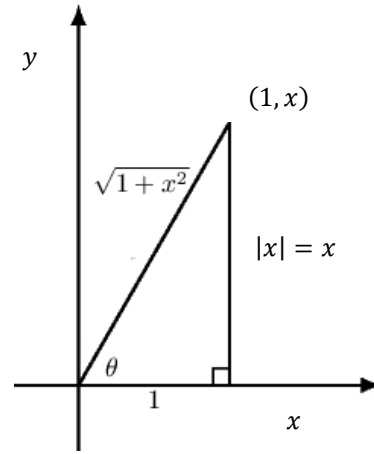
² $\sigma\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\sigma\varphi\alpha \cdot \sigma\varphi\beta - 1}{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta}$

$$\eta\mu(\operatorname{τοξ}\varepsilon\varphi(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

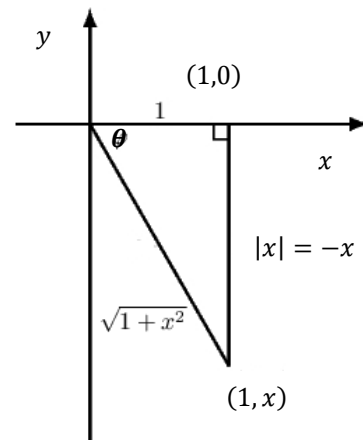
και αυτό αντανακλά το γεγονός ότι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί $\eta\mu\theta$ και $\varepsilon\varphi\theta$ είναι ομόσημοι σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(0, \frac{\pi}{2})$ και $(-\frac{\pi}{2}, 0)$.

► Για την περίπτωση που $x = 0$, δεν έχουμε να δείξουμε κάτι.

Θα υπολογίσουμε το $\operatorname{συν}(\operatorname{τοξ}\sigma\varphi(x))$ συναρτήσει του x . Το Πεδίο τιμών της $\operatorname{τοξ}\sigma\varphi$ είναι το $[0, \pi]$.



$x > 0$



$x < 0$

► Έστω πρώτα ότι $x > 0$. Τότε, θέτουμε $\operatorname{τοξ}\sigma\varphi(x) = \varphi$ ($x > 0$) $\Leftrightarrow \sigma\varphi\varphi = x$, $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Ευρίσκουμε έκφραση του $\operatorname{συν}\varphi$ είτε με το τριγωνάκι το οποίο θα έχει υποτείνουσα $\sqrt{1+x^2}$ και προσκείμενη πλευρά της γωνίας φ την $|x| = x$, είτε με τριγωνομετρικούς χειρισμούς: από τη γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\operatorname{συν}^2\varphi = \frac{\sigma\varphi^2\varphi}{1 + \sigma\varphi^2\varphi}$$

και το ότι $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \operatorname{συν}\varphi > 0$, έχουμε ότι

$$\operatorname{συν}(\operatorname{τοξ}\sigma\varphi(x)) = \operatorname{συν}\varphi = \sqrt{\frac{\sigma\varphi^2\varphi}{1 + \sigma\varphi^2\varphi}} = \sqrt{\frac{x^2}{1 + x^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \quad (\text{αφού } x > 0)$$

► Για την περίπτωση που $x < 0$, δουλεύουμε εντελώς όμοια και ευρίσκουμε (πάλιν)

$$\operatorname{συν}(\operatorname{τοξ}\sigma\varphi(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

και αυτό αντανακλά το γεγονός ότι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί $\operatorname{συν}\varphi$ και $\sigma\varphi\varphi$ είναι ομόσημοι σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(0, \frac{\pi}{2})$ και $(-\frac{\pi}{2}, 0)$.

► Για την περίπτωση που $x = 0$, δεν έχουμε να δείξουμε κάτι.

Άσκηση για τον αναγνώστη: Κάντε σχήμα όπως στο προηγούμενο ερώτημα

Εναλλακτικός τρόπος επίλυσης της 3

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f: \mathbb{R}_* \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \operatorname{τοξ}\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{τοξ}\varepsilon\varphi(x)$$

Τότε η f είναι καλά ορισμένη αφού το κοινό πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $x \mapsto \operatorname{τοξ}\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ και $x \mapsto \operatorname{τοξ}\varepsilon\varphi(x)$ είναι το $\mathbb{R}_*$ και παραγωγίσιμη στο σύνολο αυτό με

$$f'(x) = \left(\operatorname{τοξ}\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right)' + (\operatorname{τοξ}\varepsilon\varphi(x))' = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} + \frac{1}{1 + x^2} = -\frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + x^2} = 0$$

($\forall x \in \mathbb{R}_*$) και αρα η f είναι σταθερή σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του (μη-συνεκτικού) συνόλου $\mathbb{R}_* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Τότε, από γνωστό μας Πόρισμα, υπάρχουν (πραγματικές) σταθερές c_1 και c_2 τέτοιες ώστε

$$f(x) = \begin{cases} c_1, & x < 0 \\ c_2, & x > 0 \end{cases}$$

Αλλά, $f(1) = 2\tau\omicron\chi\epsilon\varphi(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ και αρα $c_2 = \frac{\pi}{2}$ και $f(-1) = 2\tau\omicron\chi\epsilon\varphi(-1) = 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$ και αρα $c_1 = -\frac{\pi}{2}$. Έτσι, τελικά,

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & x < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x > 0 \end{cases}$$

Δραστηριότητες σελ. 124 (Παράγωγος αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων)

1. (α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tau\omicron\chi\eta\mu x}{e^{2x}-1}$. Λόγω της συνέχειας της συνάρτησης $\tau\omicron\chi\eta\mu$ έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tau\omicron\chi\eta\mu x = \tau\omicron\chi\eta\mu\left(\lim_{x \rightarrow 0} x\right) = \tau\omicron\chi\eta\mu 0 = 0$$

και εύκολα να δούμε ότι για κάθε $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ είναι $e^{2x} - 1 \neq 0$. Επίσης, λόγω της συνέχειας της συνάρτησης e^x έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} - 1) = e^{\lim_{x \rightarrow 0} (2x)} - 1 = e^0 - 1 = 0$$

και αρα, από Θεώρημα του DLH, έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tau\omicron\chi\eta\mu x}{e^{2x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tau\omicron\chi\eta\mu x)'}{(e^{2x}-1)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2e^{2x}\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\lim_{x \rightarrow 0} e^{2x}\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2e^0\sqrt{1-0}} = \frac{1}{2}$$

(β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tau\omicron\chi\eta\mu x}{\tau\omicron\chi\epsilon\varphi(2x)}$. Λόγω της συνέχειας των συναρτήσεων $\tau\omicron\chi\eta\mu$ και $\tau\omicron\chi\epsilon\varphi$ έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tau\omicron\chi\eta\mu x = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \tau\omicron\chi\epsilon\varphi(2x)$$

Το πεδίο ορισμού της $x \mapsto \tau\omicron\chi\epsilon\varphi(2x)$ είναι το $\mathbb{R}$ και όπως έχουμε ήδη δει, θα είναι

$$\tau\omicron\chi\epsilon\varphi(2x) \neq 0, \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

και αρα, από Θεώρημα του DLH, έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tau\omicron\chi\eta\mu x}{\tau\omicron\chi\epsilon\varphi(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tau\omicron\chi\eta\mu x)'}{(\tau\omicron\chi\epsilon\varphi(2x))'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{2}{1+4x^2}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+4x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (1+4x^2)}{\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}$$

(γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(2x)}{\tau\omicron\chi\epsilon\varphi(2x)}$. Ακριβώς όπως και στα δυο προηγούμενα ερωτήματα έχουμε από Θεώρημα του DLH, ότι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(2x)}{\tau\omicron\chi\epsilon\varphi(2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\eta\mu(2x))'}{(\tau\omicron\chi\epsilon\varphi(2x))'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sigma\upsilon\nu(2x)}{\frac{2}{1+4x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} [(1+4x^2)\sigma\upsilon\nu(2x)] = (1+4 \cdot 0^2)\sigma\upsilon\nu(2 \cdot 0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Παρατήρηση:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(2x)}{\tau\omicron\chi\epsilon\varphi(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\tau\omicron\chi\epsilon\varphi x}$$

(δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tau\omicron\chi\epsilon\varphi x - x + \frac{x^3}{3}}{x^3}$. Ακριβώς όπως και στα προηγούμενα ερωτήματα έχουμε από Θεώρημα του DLH, ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tau\omicron\chi\epsilon\varphi x - x + \frac{x^3}{3}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\tau\omicron\chi\epsilon\varphi x - x + \frac{x^3}{3}\right)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\tau\omicron\chi\epsilon\varphi x - x + \frac{x^3}{3}\right)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1+x^2} = 0$$

2. (α) $f(x) = \tau\omicron\chi\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)$. Είναι

$$D(f) = \left\{\frac{x}{2} \in [-1, 1]\right\} = \{x \in [-2, 2]\}$$

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του συνόλου $[-2, 2]$, ήτοι στο $(-2, 2)$ με

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)'}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}, \quad \forall x \in (-2, 2)$$

(β) $f(x) = \text{τοξημ}\left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right) = \text{τοξημ}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1-x)\right)$. Είναι $D(f) = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-x) \in [-1, 1]\right\}$ Επίσης,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2}(1-x) \in [-1, 1] &\Leftrightarrow (1-x) \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \Leftrightarrow (-x) \in [-1-\sqrt{2}, \sqrt{2}-1] \\ &\Leftrightarrow x \in [-(\sqrt{2}-1), -(-1-\sqrt{2})] \Leftrightarrow x \in [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}] \end{aligned}$$

και αρα $D(f) = [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του συνόλου $[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$, ήτοι στο $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ με

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1-x)\right)'}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1-x)\right)^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(1-x)^2}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2 - (1-x)^2}}$$

$$\forall x \in (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$$

(γ) $f(x) = \text{τοξεφ}(\varepsilon\varphi^2 x)$. Έστω g η συνάρτηση με τύπο $g(x) = \varepsilon\varphi^2 x$. Τότε

$$D(f) = \{x \in D(g) : \varepsilon\varphi^2 x \in \mathbb{R}\} = D(g) = \left\{x \neq \frac{\kappa\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} - \{0\}\right\}$$

Για $x \in \bigcup_{\kappa \in \mathbb{Z}} \left[\kappa\pi, \kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, (\kappa+1)\pi\right)$ είναι

$$f'(x) = \frac{(\varepsilon\varphi^2 x)'}{1 + (\varepsilon\varphi^2 x)^2} = \frac{2\varepsilon\varphi x \cdot \tau\epsilon\mu^2 x}{1 + \varepsilon\varphi^4 x}$$

(δ) $f(x) = \text{τοξεφ}(x + \sqrt{1+x^2})$. Είναι $D(f) = \{(x + \sqrt{1+x^2}) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ και $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f'(x) = \frac{(x + \sqrt{1+x^2})'}{1 + (x + \sqrt{1+x^2})^2} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1 + (x + \sqrt{1+x^2})^2} = \frac{1}{2(1+x^2)}$$

(ε) $f(x) = \text{τοξσυν}\left(\frac{1}{x}\right)$. Είναι $D(f) = \left\{\frac{1}{x} \in [-1, 1]\right\}$. Αλλά,

$$\frac{1}{x} \in [-1, 1] \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \left(-1 \leq \frac{1}{x}\right) \vee \left(\frac{1}{x} \leq 1\right) \Leftrightarrow (x \leq -1) \vee (1 \leq x)$$

³δηλ.

$$D(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) = \mathbb{R} - (-1, 1)$$

Στα σημεία $x = \pm 1$ η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη. Έτσι, $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) = \mathbb{R} - [-1, 1]$ είναι

$$f'(x) = -\frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}} = -\frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

Παρατήρηση: ένα σημείο, το $x = 0$ 'προκάλεσε' την αφαίρεση ενός ολόκληρου διαστήματος του Π.Ο. της f , του $(-1, 1)$.

3. $f(x) = 3x - \text{τοξημ}(x)$. Κατ'αρχάς, είναι $D(f) = [-1, 1]$ και στα σημεία $x = \pm 1$ η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη. Συνεπώς, αυτά είναι και κρίσιμα σημεία αυτής. Επίσης, για κάθε $x \in (-1, 1)$ είναι

$$f'(x) = 3 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3\sqrt{1-x^2} - 1}{\sqrt{1-x^2}}$$

και αρα

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{1-x^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \in [-1, 1]$$

Άρα, τελικά, τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα $x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}, \pm 1$

³ Διαφορετικά, $-1 \leq \frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} \leq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1$

Παρατήρηση: Αν θέλουμε να μελετήσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, κατα τα γνωστά βρίσκουμε ότι το γράφημά της παρουσιάζει:

► Τοπικό μέγιστο (το οποίο είναι και ολικό) στο σημείο

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, f\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \right) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, 2\sqrt{2} - \text{τοξημ}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \right) \approx \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, 1.6 \right)$$

► Τοπικό ελάχιστο (το οποίο είναι και ολικό) στο σημείο

$$\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \underbrace{f\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)}_{f \text{ περιττή ή}} \right) = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, -f\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \right) \approx \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, -1.6 \right)$$

► Σημείο καμπής στο σημείο $(0, f(0)) = (0, 0)$ και ανάλογα η στροφή των κοίλων

► Τοπικά ακρότατα είναι επίσης τα σημεία $(1, f(1))$ και $(-1, -f(1))$

4. (α) $f(x) = x - 2\text{τοξεφ}(x)$. Είναι $D(f) = \mathbb{R}$ και η συνάρτηση είναι παντού παραγωγίσιμη. Έτσι, τα μόνα κρίσιμα σημεία της είναι τα σημεία στα οποία $f'(x) = 0$. Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Για να βρούμε το είδος του ακρότατου στα σημεία αυτά, χρησιμοποιούμε το Κριτήριο της Δευτέρας Παραγώγου:

$$f''(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

και αφού $f''(-1) = -2 < 0$, έπεται ότι το σημείο $(-1, f(-1)) = (-1, -1 - 2\text{τοξεφ}(-1)) = (-1, -1 - 2(-\frac{\pi}{4})) = (-1, -1 + \frac{\pi}{2})$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου του γραφήματος της f και αφού

$f''(1) = 2 > 0$, έπεται ότι το σημείο $(1, f(1)) = (1, -f(-1)) = (-1, 1 - \frac{\pi}{2})$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου του γραφήματος της f . Χρησιμοποιήσαμε το ότι η f είναι περιττή συνάρτηση.

(β) $f(x) = \text{τοξσυν}(x^2)$. Είναι $D(f) = [-1, 1]$ και η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της, δηλ. στο $(-1, 1)$. Έτσι, τα σημεία $x = \pm 1$ είναι κρίσιμα σημεία της f . Επίσης,

$$f'(x) = -\frac{(x^2)'}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

και αρα $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in (-1, 1)$.

Για να βρούμε το είδος του ακρότατου στα σημεία αυτά, χρησιμοποιούμε το Κριτήριο της Πρώτης Παραγώγου:

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in (-1, 0)$ είναι $f'(x) > 0$ και αρα η f γνησίως αύξουσα (και λόγω της συνέχειας της f στο σημείο $x = -1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 0)$ για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $f'(x) < 0$ και αρα η f γνησίως φθίνουσα (και λόγω της συνέχειας της f στα σημεία $x = 0, 1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$) και αρα αφού $f'(0) = 0$, από το κριτήριο πρώτης παραγώγου έχουμε ότι το σημείο $(0, f(0)) = (0, \text{τοξσυν}(0)) = (0, \frac{\pi}{2})$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου του γραφήματος της f .

Επίσης, το σημείο $(-1, f(-1)) = (-1, \text{τοξσυν}(-1)) = (-1, 0)$ και $(1, f(1)) = (1, \text{τοξσυν}(1)) = (1, 0)$

είναι τοπικά ακρότατα της συνάρτησης.

(γ) $f(x) = \text{τοξημ}(e^x)$. Η f είναι σύνθεση της $x \mapsto g(x) = e^x$ με την $x \mapsto h(x) = \text{τοξημ}(x)$. Συνεπώς, (για να έχει νόημα η σύνθεση αυτή, όπως φυσικά κάναμε και στις προηγούμενες ασκήσεις),

$$D(f) = \{x \in D(g): g(x) \in D(h)\} = \{x \in \mathbb{R}: e^x \in [-1, 1]\}$$

Αλλά, $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ και αρα $D(f) = \{x \in \mathbb{R}: e^x \in (0, 1]\}$, δηλ. $D(f) = (-\infty, 0]$ αφού η g είναι γνησίως αύξουσα με $g^{-1}(1) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της (ως σύνθεση τέτοιων) με

$$f'(x) = \frac{(e^x)'}{\sqrt{1-(e^x)^2}} = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} > 0, \forall x \in (-\infty, 0]$$

και αρα η f είναι γνησίως αύξουσα παντού στο Π.Ο.της με

$$\max_{x \in (-\infty, 0]} f(x) = f(0) = \text{τοξημ}(e^0) = \text{τοξημ}(1) = \frac{\pi}{2}$$

5. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = x - \text{τοξημ}x$$

Είναι καλά ορισμένη, αφού το πεδίο ορισμού της ταυτοτικής είναι όλο το $\mathbb{R}$ και της $x \mapsto h(x) = \text{τοξημ}(x)$ είναι το διάστημα $[-1,1]$. Επίσης, η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in [0,1]$$

Αλλά,

$$\forall x \in (0,1), \sqrt{1-x^2} > 1 \Rightarrow \forall x \in (0,1), \sqrt{1-x^2} - 1 < 0$$

δηλ. $f'(x) < 0, \forall x \in (0,1)$ και άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$ και άρα, αφού $f(0) = 0$ και λόγω της συνέχειας της συνάρτησης στο $x = 0$, θα είναι $f(x) \leq 0 = f(0), \forall x \in [0,1]$ με την ισότητα μόνο για $x = 0$. Τέλος, αφού $f(1) = 1 - \text{τοξημ}1 = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$, έπεται ότι

$$f(x) \leq 0 = f(0), \quad \forall x \in [0,1]$$

δηλ. $x - \text{τοξημ}x \leq 0, \forall x \in [0,1]$, δηλ. $x \leq \text{τοξημ}x, \forall x \in [0,1]$ με την ισότητα μόνο για $x = 0$.

Δραστηριότητες σελ. 124 (Ενότητας)

1. Θέτουμε $\theta = \text{τοξημ}\left(\frac{4}{5}\right)$. Τότε αφού το $\frac{4}{5} \in [-1,1]$, έχουμε

$$\theta = \text{τοξημ}\left(\frac{4}{5}\right) \Leftrightarrow \frac{4}{5} = \eta\mu\theta$$

Θυμηθείτε: $\eta\mu y = x \Leftrightarrow y = \text{τοξημ}x + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

2. Έχουμε

$$\text{τοξσυν}\left(\frac{3}{4}\right) = y \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \sigma\eta\nu y, \quad y \in [0, \pi] \text{ και } \text{τοξσυν}\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = z \Leftrightarrow \frac{\sqrt{7}}{4} = \sigma\eta\nu z, \quad z \in [0, \pi]$$

Έτσι, $(y+z) \in [0, 2\pi]$ και

$$\sigma\eta\nu(y+z) = \sigma\eta\nu y \cdot \sigma\eta\nu z - \eta\mu y \cdot \eta\mu z = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{3}{4} = 0$$

και άρα $y+z = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Αλλά, $(y+z) \in [0, 2\pi]$ και άρα, σύμφωνα με την πιο πάνω, $y+z = \frac{\pi}{2}$, δηλ.

$$\text{τοξσυν}\left(\frac{3}{4}\right) + \text{τοξσυν}\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

3. Λόγω της συνέχειας της συνάρτησης τοξσυν έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{τοξσυν}(1-x) = \text{τοξσυν}\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x)\right) = \text{τοξσυν}1 = 0$$

και εύκολα να δούμε ότι για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $\sqrt{x} \neq 0$. Επίσης, λόγω της συνέχειας της συνάρτησης $x \mapsto \sqrt{x}$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$$

και άρα, από θεώρημα του DLH, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{τοξσυν}(1-x)}{\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\text{τοξσυν}(1-x))'}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x(2-x)}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1}{2-x}} \\ &= 2 \sqrt{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$**4.**(\alpha) f(x) = \frac{x}{2} \text{τοξημ}(x) + \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} = \frac{x}{2} (\text{τοξημ}(x) + \sqrt{1-x^2})$$

Το πεδίο ορισμού της f είναι το πεδίο ορισμού της πρόσθεσης των συναρτήσεων $x \mapsto \text{τοξημ}(x)$ και $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$, δηλ.

$$D(f) = [-1,1] \cap \underbrace{\{1-x^2 \geq 0\}}_{[-1,1]} = [-1,1]$$

Στο εσωτερικό του συνόλου αυτού, δηλ. στο $(-1,1)$ η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{1}{2} \text{τοξημ}(x) + \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} - \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \text{τοξημ}(x) - \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ή

$$f'(x) = \frac{1}{2} \operatorname{τοξημ}(x) + \frac{(2x+1)\sqrt{1-x^2}}{2(x+1)}$$

$(\beta)f(x) = 2x\operatorname{τοξημ}(x) - \ln(1+x^2)$. Το πεδίο ορισμού της f είναι το πεδίο ορισμού της πρόσθεσης των συναρτήσεων $x \mapsto \operatorname{τοξημ}(x)$ και $x \mapsto \ln(1+x^2)$. Και οι δυο αυτές συναρτήσεις έχουν π.ο. το $\mathbb{R}$. Άρα, $D(f) = \mathbb{R}$. Στο σύνολο αυτό η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = 2\operatorname{τοξημ}(x) + 2x \cdot \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = 2\operatorname{τοξημ}(x)$$

$(\gamma)f(x) = \operatorname{τοξημ}(\sqrt{1-x})$. Η f είναι σύνθεση της $x \mapsto g(x) = \sqrt{1-x}$ με την $x \mapsto h(x) = \operatorname{τοξημ}(x)$. Συνεπώς, (για να έχει νόημα η σύνθεση αυτή, όπως φυσικά κάναμε και στις προηγούμενες ασκήσεις),

$$D(f) = \{x \in D(g) : g(x) \in D(h)\} = \{x \in (-\infty, 1] : \sqrt{1-x} \in [0, 1]\} = [0, 1]$$

Στο εσωτερικό του συνόλου αυτού, δηλ. στο $(0, 1)$ η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{1-x})}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x})^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

5. $f(x) = \operatorname{τεμχ} = \frac{1}{\operatorname{συν} x}$

Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $\{\operatorname{συν} x \neq 0\} = \{x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$. Η συνάρτηση λοιπόν έχει πόλους τάξης 1 στα σημεία $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ και αρα κατακόρυφες ασύμπτωτες. Ξέρουμε ότι η συνάρτηση $x \mapsto \operatorname{συν} x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$. Επίσης, παρατηρούμε ότι $(\operatorname{συν} x)' = -\eta\mu x$ και αρα η συνάρτηση αυτή είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. Επίσης, $\operatorname{συν}(0) = 1 = -\operatorname{συν}(\pi)$. Λόγω της συνέχειάς της στα σημεία με $x = 0, \pi$, η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2})$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(\frac{\pi}{2}, \pi]$. Έξω από το διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ η συνάρτηση επαναλαμβάνει τη μονοτονία της. Παρατηρούμε ότι $\operatorname{συν}([0, \frac{\pi}{2})) = (0, 1]$ και $\operatorname{συν}((\frac{\pi}{2}, \pi]) = [-1, 0)$ και

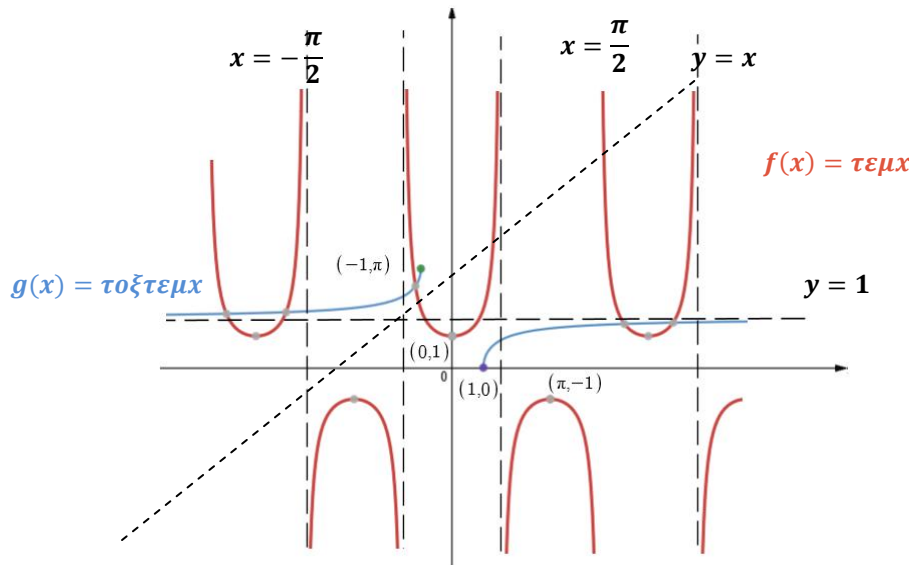
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{τεμχ} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\operatorname{συν} x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{τεμχ} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\operatorname{συν} x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

αρα $f([0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Περιοριζόμαστε λοιπόν στο διάστημα αυτό για τη μελέτη της f , αφού λόγω της περιοδικότητας της συνάρτησης, έπεται το γράφημα και στους λοιπούς κλάδους (διαστήματα) αυτής. Σημειώνουμε όμως ότι $R(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Έτσι, η f αντιστρέφεται στο σύνολο $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ με $D(f^{-1}) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Επίσης, αφού η συνάρτηση f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο σημείο με $x = \frac{\pi}{2}$, έπεται ότι η f^{-1} έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 1$ με

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} f^{-1}(y) = 1 = \lim_{y \rightarrow +\infty} f^{-1}(y)$$

Αυτό μπορούμε να το δούμε από τα πιο πάνω όρια ή από το ότι οι δυο συναρτήσεις είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία με εξίσωση $y = x$. Τέλος, αφού η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο $[0, \frac{\pi}{2})$ και προς τα κάτω στο $(\frac{\pi}{2}, \pi]$ έπεται ότι η f^{-1} στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο $(-\infty, -1]$ και προς τα κάτω στο $[1, +\infty)$.

Παρατήρηση: ένα σημείο, το $x = \frac{\pi}{2}$ 'προκάλεσε' την αφαίρεση ενός ολόκληρου διαστήματος του Π.Ο. της f , του $(-1, 1)$.



6. $f(x) = 4\text{τοξεφ}(x) - 2x$. Είναι $D(f) = \mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με (κατα τα γνωστά)

$$f'(x) = \frac{4}{1+x^2} - 2 = 2 \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2 \frac{(1-x)(1+x)}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Τα κρίσιμά της σημεία λοιπόν είναι εκείνα για τα οποία $f'(x) = 0$, δηλ. τα $x = \pm 1$. Έχουμε $\forall x \in (-\infty, -1)$ είναι $f'(x) < 0$ και αρα η συνάρτηση γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό και $\forall x \in (-1, 1)$ είναι $f'(x) > 0$ και αρα η συνάρτηση γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό και έτσι, αφού $f'(-1) = 0$, έπεται από το κριτήριο πρώτης παραγώγου ότι το γράφημα της συνάρτησης παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $(-1, f(-1)) = (-1, 2 - \pi)$. Με παρόμοιο επιχείρημα, έχουμε ότι το γράφημα της συνάρτησης παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $(1, f(1)) = (1, \pi - 2)$.

7. $f(x) = \text{τοξεφ}(x) - x + \frac{x^3}{3}$. Είναι $D(f) = \mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με (κατα τα γνωστά)

$$f'(x) = \frac{x^4}{1+x^2} > 0$$

Συνεπώς, η f είναι γνησίως αύξουσα παντού στο $\mathbb{R}$, άρα $f(x) > f(0) = 0, \forall x > 0$, δηλ.

$$\text{τοξεφ}(x) > x + \frac{x^3}{3}, \quad \forall x > 0$$

Δραστηριότητες σελ. 126 (Εμπλουτισμού)

1. Θα αποδείξουμε την ταυτότητα του **Machin [1706]**:

$$\frac{\pi}{4} = \text{τοξεφ}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{τοξεφ}\left(\frac{1}{3}\right)$$

Έχουμε

$$\text{τοξεφ}\left(\frac{1}{2}\right) = y \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \varepsilon\varphi y, \quad y \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{και} \quad \text{τοξεφ}\left(\frac{1}{3}\right) = z \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \varepsilon\varphi z, \quad z \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

Έτσι, $(y+z) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και

$$\varepsilon\varphi(y+z) = \frac{\varepsilon\varphi y + \varepsilon\varphi z}{1 - \varepsilon\varphi y \varepsilon\varphi z} = \dots = 1 = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

και αρα $y+z = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

Αλλά, $(y+z) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και αρα $y+z = \frac{\pi}{4}$, δηλ.

$$\text{τοξεφ}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{τοξεφ}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4} \quad (1).$$

Θα αποδείξουμε την ταυτότητα του **Hutton**: $\frac{\pi}{4} = \text{τοξεφ}\left(\frac{1}{7}\right) + 2\text{τοξεφ}\left(\frac{1}{3}\right)$

Δείχνουμε πρώτα ότι

$$\tauοξεφ\left(\frac{1}{2}\right) = \tauοξεφ\left(\frac{1}{3}\right) + \tauοξεφ\left(\frac{1}{7}\right) \quad (2)$$

Έχουμε

$$\tauοξεφ\left(\frac{1}{7}\right) = y \Leftrightarrow \frac{1}{7} = \varepsilon\varphi y, \quad y \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \text{ και } \tauοξεφ\left(\frac{1}{3}\right) = z \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \varepsilon\varphi z, \quad z \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

Έτσι, $(y + z) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και

$$\varepsilon\varphi(y + z) = \frac{\varepsilon\varphi y + \varepsilon\varphi z}{1 - \varepsilon\varphi y \varepsilon\varphi z} = \frac{\frac{1}{7} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

και αρα $y + z = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$. Αλλά, $(y + z) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και αρα $y + z = \tauοξεφ\left(\frac{1}{2}\right)$, δηλ.

$$\tauοξεφ\left(\frac{1}{2}\right) = \tauοξεφ\left(\frac{1}{3}\right) + \tauοξεφ\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Από τις (1) και (2) έχουμε τελικά ότι

$$\frac{\pi}{4} = \tauοξεφ\left(\frac{1}{7}\right) + 2\tauοξεφ\left(\frac{1}{3}\right)$$

2. Προφανές, αφού αν $x \in [-1, 1]$, τότε $(-x) \in [-1, 1]$ και $\tauοξημ(-x) = -\tauοξημx$.

3. Η συνάρτηση $y = \tauοξσυνx$, $x \in [-1, 1]$, δεν είναι άρτια: π.χ. $\tauοξσυν(1) = 0 \neq \pi = \tauοξσυν(-1)$

Η συνάρτηση $y = \tauοξσυνx$, $x \in [-1, 1]$, δεν είναι περιττή: π.χ. $\tauοξσυν(1) = 0 \neq -\pi = -\tauοξσυν(-1)$

4. $f(x) = \tauοξεφ(x)$. Είναι $D(f) = \mathbb{R}$. Έστω $x > 0$ σταθεροποιημένο. Τότε, ισχύουν οι υποθέσεις του ΘΜΤ για την f στο διάστημα $[0, x]$: υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}, \quad \text{δηλ. } f'(\xi) = \frac{\tauοξεφ(x) - \overbrace{\tauοξεφ(0)}^0}{x}$$

Αλλά, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ και αρα η πιο πάνω είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{1}{1+\xi^2} = \frac{\tauοξεφ(x)}{x}, \quad \text{δηλ. την } \tauοξεφ(x) = \frac{x}{1+\xi^2} \quad (*)$$

Αλλά, $\xi \in (0, x) \Rightarrow \xi^2 \in (0, x^2) \Rightarrow (\xi^2 + 1) \in (1, 1+x^2) \Rightarrow \frac{1}{1+\xi^2} \in \left(\frac{1}{1+x^2}, 1\right)$ και αφού $x > 0$,

$$\frac{x}{1+\xi^2} \in \left(\frac{x}{1+x^2}, x\right)$$

και αρα η (*) δίνει

$$\frac{x}{1+x^2} < \tauοξεφ(x) < x$$

Αφού το x ήταν τυχόν, το ζητούμενο έπεται.

5. Θα δείξουμε ότι

$$\tauοξεφ\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \tauοξεφx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & x < 1 \\ -\frac{3\pi}{4}, & x > 1 \end{cases}$$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $x \mapsto f(x) = \tauοξεφ\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \tauοξεφx$. Είναι $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$. Σε κάθε μια από τις 2 συνεκτικές συνιστώσες του συνόλου $\mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

και αρα αυτή είναι σταθερή σε κάθε μία από αυτές, ήτοι υπάρχουν (πραγματικές) σταθερές c_1 και c_2 τέτοιες ώστε

$$f(x) = \begin{cases} c_1, & x < 1 \\ c_2, & x > 1 \end{cases}$$

Αλλά, $f(0) = \text{τοξεφ}1 - \text{τοξεφ}0 = \frac{\pi}{4}$ και άρα $c_1 = \frac{\pi}{4}$ και $f(-1) = \text{τοξεφ}0 - \text{τοξεφ}(-1) = -\frac{3\pi}{4}$ και άρα $c_2 = -\frac{3\pi}{4}$. Έτσι, τελικά,

$$f(x) = \text{τοξεφ}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \text{τοξεφ}x = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & x < 1 \\ -\frac{3\pi}{4}, & x > 1 \end{cases}$$

Παρατήρηση

Η $g(x) = \text{τοξεφ}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ έχει άλμα ασυνέχειας μήκους π στο σημείο $x = 1$ αφού

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \text{τοξεφ}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \text{τοξεφ}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

και αυτό δικαιολογεί κατα κάποιον τρόπο γιατί η 'διαφορά' $\text{τοξεφ}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \text{τοξεφ}x$ είναι π στο σημείο αυτό. Εναλλακτικά, η άσκηση μπορεί να λυθεί όπως η άσκηση 3/σελ 129 του σχολικού βιβλίου. Παρατηρήστε ότι ο μετασχηματισμός

$$x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$$

είναι αντιστρέψιμος. Οι δυο τρόποι συνδέονται από τη γνωστή ταυτότητα

$$\text{τοξεφ}(x) \pm \text{τοξεφ}(y) = \text{τοξεφ}\left(\frac{x \pm y}{1 \mp xy}\right), \text{ αν } xy \neq 1$$