

Δραστηριότητες σελ. 80 (Ενότητα 4.5: Μέθοδοι υπολογισμού του Αθροίσματος μιας Σειράς)

1. (α) Έχουμε

$$\begin{aligned}
 1 \cdot 2^2 + 3 \cdot 4^2 + 5 \cdot 6^2 + \dots &= \sum_{k=1}^{\infty} (2k)^2 (2k-1) \\
 \Rightarrow S_v = 4 \sum_{k=1}^v (2k^3 - k^2) &= 4 \left(2 \frac{v^2(v+1)^2}{4} - \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} \right) \\
 &= v(v+1) \left(2v(v+1) - 2 \frac{2v+1}{3} \right) \\
 &= \frac{2}{3} v(v+1)(3v^2 + v - 1)
 \end{aligned}$$

Πως το βρήκαμε:

Οι όροι $1, 3, 5, \dots$ αποτελούν διαδοχικούς όρους Α.Π. $(\alpha_n)_n$ με σταθερή διαφορά $\delta = 2$ και αρχικό όρο $\alpha_1 = 1$. Έτσι,

$$\alpha_k = \alpha_1 + (k-1)2 = 1 + (k-1)2 = 2k-1.$$

Οι όροι $2, 4, 6, \dots$ αποτελούν διαδοχικούς όρους Α.Π. $(\alpha_n)_n$ με σταθερή διαφορά $\delta = 2$ και αρχικό όρο $\alpha_1 = 2$. Έτσι,

$$\alpha_k = \alpha_1 + (k-1)\delta = 2 + (k-1)2 = 2k.$$

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned}
 2 \cdot 5 + 6 \cdot 8 + 10 \cdot 11 + 14 \cdot 14 + \dots &= \sum_{k=1}^{\infty} 2(2k-1)(3k-2) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (6k^2 - 7k + 2) \\
 \Rightarrow S_v = 2 \sum_{k=1}^v (6k^2 - 7k + 2) &= 2 \left(6 \sum_{k=1}^v k^2 - 7 \sum_{k=1}^v k + 2 \sum_{k=1}^v 1 \right) \\
 &= 4 \left(6 \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} - 7 \frac{v(v+1)}{2} + 2v \right) \\
 &= 4v \left((v+1)(2v+1) - 7 \frac{v+1}{2} + 2 \right) \\
 &= v(4v^2 + 7v - 1)
 \end{aligned}$$

Πως το βρήκαμε:

Οι όροι $5, 8, 11, 14, \dots$ αποτελούν διαδοχικούς όρους Α.Π. $(\alpha_k)_k$ με σταθερή διαφορά $\delta = 3$ και αρχικό όρο $\alpha_1 = 5$. Έτσι,

$$\alpha_k = \alpha_1 + (k-1)\delta = 5 + (k-1)3 = 3k-2.$$

Οι όροι $2, 6, 10, 14, \dots$ αποτελούν διαδοχικούς όρους Α.Π. $(\alpha_k)_k$ με σταθερή διαφορά $\delta = 4$ και αρχικό όρο $\alpha_1 = 2$. Έτσι,

$$\alpha_k = \alpha_1 + (k-1)\delta = 2 + (k-1)4 = 2(2k-1).$$

(γ) Έχουμε

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)^3 = \sum_{k=1}^{\infty} (8k^3 - 4k^2 + 2k - 1)$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow S_v &= 2 \sum_{k=1}^v (8k^3 - 4k^2 + 2k - 1) = 2 \left(8 \sum_{k=1}^v k^3 - 4 \sum_{k=1}^v k^2 + 2 \sum_{k=1}^v k - \sum_{k=1}^v 1 \right) \\
 &= 2 \left(8 \frac{v^2(v+1)^2}{4} - 4 \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} + 2 \frac{v(v+1)}{2} - v \right) \\
 &= 2 \left(2v^2(v+1)^2 - 2 \frac{v(v+1)(2v+1)}{3} + v(v+1) - v \right) \\
 &= v^2(2v^2 - 1)
 \end{aligned}$$

Πως το βρήκαμε:

Οι όροι $1, 3, 5, 7, \dots$ αποτελούν διαδοχικούς όρους Α.Π. $(\alpha_k)_k$ με σταθερή διαφορά $\delta = 2$ και αρχικό όρο $\alpha_1 = 1$. Έτσι,

$$\alpha_k = \alpha_1 + (k-1)\delta = 1 + (k-1)2 = 2k - 1.$$

(δ) Έχουμε

$$\begin{aligned}
 1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + \dots + v(v+1)(v+2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{\infty} (8k^3 - 4k^2 + 2k - 1) \\
 \Rightarrow S_v &= \sum_{k=1}^v (k^3 + 3k^2 + 2k) = \sum_{k=1}^v k^3 + 3 \sum_{k=1}^v k^2 + 2 \sum_{k=1}^v k \\
 &= \frac{v^2(v+1)^2}{4} + 3 \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} + 2 \frac{v(v+1)}{2} \\
 &= v(v+1) \left(\frac{v(v+1)}{4} + \frac{2v+1}{2} + 1 \right) \\
 &= \frac{1}{4} v(v+1)(v+2)(v+3)
 \end{aligned}$$

2. Έχουμε

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=v+1}^{3v} k(6k-2) &= 2 \sum_{k=v+1}^{3v} k(3k-1) = 2 \sum_{k=v+1}^{3v} (3k^2 - k) = 2 \left(\sum_{k=1}^{3v} (3k^2 - k) - \sum_{k=1}^{v+1} (3k^2 - k) \right) \\
 &= 2 \left(3 \sum_{k=1}^{3v} k^2 - \sum_{k=1}^{3v} k - 3 \sum_{k=1}^{v+1} k^2 + \sum_{k=1}^{v+1} k \right) \\
 &= 2 \left(\frac{3v(3v+1)(6v+1)}{6} - \frac{3v(3v+1)}{2} - \frac{(v+1)(v+2)(2v+3)}{6} + \frac{(v+1)(v+2)}{2} \right) \\
 &= 2 \left(\frac{v(3v+1)(6v+1)}{2} - \frac{3v(3v+1)}{2} - \frac{(v+1)(v+2)(2v+3)}{6} + \frac{(v+1)(v+2)}{2} \right) \\
 &= v(3v+1)(6v+1) - 3v(3v+1) - \frac{(v+1)(v+2)(2v+3)}{3} + (v+1)(v+2) \\
 &= 4v^2(13v+4)
 \end{aligned}$$

3. (α) Έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Είναι} \quad S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) \\
 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

(β) Έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k^2 - 1} = \frac{1}{9} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

Με μεθόδους που ξεφεύγουν από την ύλη του Λυκείου, αποδεικνύεται ότι αν $\alpha \in (0,1)$, τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha} \left[\frac{1}{\alpha} - \pi \sigma\varphi(\alpha\pi) \right]$$

και αρα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{3}} \left[\frac{1}{\frac{1}{3}} - \pi \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] = \frac{3}{2} \left(3 - \pi \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

Έτσι,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k^2 - 1} = \frac{1}{9} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{18} (9 - \pi\sqrt{3})$$

4. Έστω ότι $S_n = \frac{n}{3(2n+3)}$

(α) Είναι για κάθε $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n}{3(2n+3)} - \frac{n-1}{3(2(n-1)+3)} = \frac{n}{3(2n+3)} - \frac{n-1}{3(2n+1)} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

(β) Έχουμε $\alpha_{10} = \frac{1}{(20+1)(20+3)} = \frac{1}{483}$

(γ) Έχουμε $S_{15} = \frac{15}{3(30+3)} = \frac{5}{33}$

5. 2, 5, 9, 14, 20, 27,

Είναι

$$\alpha_1 = 2 = 1 + 1$$

$$\alpha_2 = 5 = 2 + 3 = \alpha_1 + 3 = \alpha_{2-1} + (2 + 1)$$

$$\alpha_3 = 9 = 5 + 4 = \alpha_2 + 4 = \alpha_{3-1} + (3 + 1)$$

$$\alpha_4 = 14 = 9 + 5 = \alpha_3 + 5 = \alpha_{4-1} + (4 + 1)$$

$\vdots$

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + (n + 1)$$

Διαφορετικά

$$\alpha_1 = 2 = 1 + 1$$

$$\alpha_2 = 5 = 2 + 3$$

$$\alpha_3 = 9 = 2 + 3 + 4$$

$$\alpha_4 = 14 = 2 + 3 + 4 + 5$$

$\vdots$

$$\alpha_n = 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + (n + 1)$$

και αρα

$$\alpha_v = \alpha_1 + 3 + 4 + \dots + (v+1) = 2 + 3 + 4 + \dots + v + (v+1) = \frac{v(v+3)}{2}$$

Αλλά, για κάθε $v \in \mathbb{N}$:

$$2 + 3 + 4 + 5 + \dots + (v+1) = \sum_{k=2}^{v+1} k = \sum_{k=1}^v k + v = \frac{v(v+1)}{2} + v = \frac{v(v+1) + 2v}{2} = \frac{v(v+3)}{2}$$

Τέλος,

$$S_v = \sum_{\kappa=1}^v \frac{\kappa(\kappa+3)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{\kappa=1}^v (\kappa^2 + 3\kappa) = \frac{1}{2} \left(\frac{v(v+1)(2v+1)}{6} + 3 \frac{v(v+1)}{2} \right) = \frac{v(v+1)}{4} \left(\frac{2v+1}{3} + 3 \right)$$