Δραστηριότητες σελ. 82 (Εμπλουτισμού)

1. **(α)** Δεν ισχύει ότι

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}(\alpha_\kappa \cdot \beta_\kappa) = \left(\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa\right)\cdot\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu}\beta_\kappa\right)$$

Για παράδειγμα, $\alpha_\kappa = \nu, \forall \kappa \in \{1,2,3,\cdots,\nu\}$ και $\beta_\kappa = \frac{1}{\nu}, \forall \kappa \in \{1,2,3,\cdots,\nu\}$. Τότε $\alpha_\kappa \cdot \beta_\kappa = 1, \forall \kappa \in \{1,2,3,\cdots,\nu\}$ και αρα

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}(\alpha_\kappa \cdot \beta_\kappa) = \sum_{\kappa=1}^{\nu} 1 = \nu \quad \text{ενώ} \quad \left(\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa\right)\cdot\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu}\beta_\kappa\right) = \left(\nu\sum_{\kappa=1}^{\nu}1\right)\cdot\left(\frac{1}{\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu}1\right) = \nu^2$$

(β) Δεν ισχύει ότι $\displaystyle\sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(\frac{\alpha_\kappa}{\beta_\kappa}\right) = \frac{\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa}{\sum_{\kappa=1}^{\nu}\beta_\kappa}$

Για παράδειγμα, α_κ και β_κ όπως πιο πάνω. Τότε

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(\frac{\alpha_\kappa}{\beta_\kappa}\right) = \sum_{\kappa=1}^{\nu}\nu^2 = \nu^3 \;\text{ενώ}\; \frac{\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa}{\sum_{\kappa=1}^{\nu}\beta_\kappa} = \frac{\nu^2}{1} = \nu^2$$

(γ) Δεν ισχύει ότι $\displaystyle\sum_{\kappa=1}^{\nu}(\alpha_\kappa)^2 = \left(\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa\right)^2$

Για παράδειγμα, $\alpha_\kappa = \frac{3\nu+1}{2\nu-1}, \forall \kappa \in \{2,3,\cdots,\nu\}$. Τότε

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}(\alpha_\kappa)^2 = \sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(\frac{3\nu+1}{2\nu-1}\right)^2 = \left(\frac{3\nu+1}{2\nu-1}\right)^2\sum_{\kappa=1}^{\nu}1 = \nu\left(\frac{3\nu+1}{2\nu-1}\right)^2$$

ενώ

$$\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa\right)^2 = \left(\sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(\frac{3\nu+1}{2\nu-1}\right)\right)^2 = \left(\nu\left(\frac{3\nu+1}{2\nu-1}\right)\right)^2$$

2. Έχουμε:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\nu-2^\nu}{3^\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(2\frac{\nu}{3^\nu} - \left(\frac{2}{3}\right)^\nu\right)$$

Έστω $\nu \in \mathbb{N}$ σταθεροποιημένο. Υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα της πιο πάνω σειράς:

$$S_\nu = \sum_{k=1}^{\nu}\left(2\frac{\kappa}{3^\kappa} - \left(\frac{2}{3}\right)^\kappa\right) = 2\sum_{k=1}^{\nu}\frac{\kappa}{3^\kappa} - \sum_{k=1}^{\nu}\left(\frac{2}{3}\right)^\kappa$$

$$\text{Είναι} \lim_{\nu\to+\infty}\sum_{k=1}^{\nu}\left(\frac{2}{3}\right)^\kappa = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 2 \quad \text{(Γεωμετρική σειρά) και} \lim_{\nu\to+\infty}\sum_{k=1}^{\nu}\frac{\kappa}{3^\kappa} = \frac{3}{4}$$

$$\text{και αρα} \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\nu-2^\nu}{3^\nu} = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$$

3. Κέντρο μάζας ν σωμάτων βρίσκεται στη θέση $(\bar{x}, 0)$, όπου $\bar{x} = \frac{\sum_{\kappa=1}^{\nu}(m_\kappa \cdot x_\kappa)}{\sum_{\kappa=1}^{\nu} m_\kappa}$.

$x_1 = 1$	$m_1 = 5$	$m_1 \cdot x_1 = 5$	
$x_2 = 3$	$m_2 = 7$	$m_2 \cdot x_2 = 21$	
$x_3 = 5$	$m_3 = 2$	$m_3 \cdot x_3 = 10$	
$x_4 = 7$	$m_4 = 3$	$m_4 \cdot x_4 = 21$	
	$\sum_{\kappa=1}^{\nu} m_\kappa = 17$	$\sum_{\kappa=1}^{\nu}(m_\kappa \cdot x_\kappa) = 57$	$\bar{x} = \frac{\sum_{\kappa=1}^{\nu}(m_\kappa \cdot x_\kappa)}{\sum_{\kappa=1}^{\nu} m_\kappa} = \frac{57}{17}$

Άρα, το κέντρο βάρους έχει συντεταγμένες $\left(\frac{57}{17}, 0\right)$.

4. Έχουμε για $\nu \in \mathbb{N}$ σταθεροποιημένο

$$
\begin{aligned}
S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{1}{\kappa^2} &= \sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(\frac{1}{(2\kappa-1)^2} + \frac{1}{(2\kappa)^2}\right) = \sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(\frac{1}{(2\kappa-1)^2} + \frac{1}{4\kappa^2}\right) \\
&= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{1}{(2\kappa-1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{1}{\kappa^2} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{1}{(2\kappa-1)^2} + \frac{1}{4} S_\nu \\
\Rightarrow \frac{3}{4} S_\nu &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{1}{(2\kappa-1)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{\kappa^2} = \sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{(2\kappa-1)^2} \\
\Rightarrow \frac{3}{4} \times \frac{\pi^2}{6} &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{(2\kappa-1)^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{(2\kappa-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}
$$

5. Έχουμε

$$
\begin{aligned}
\sum_{\kappa=5}^{40}\left(\sum_{i=0}^{\infty}(\kappa+2)\left(\frac{1}{\kappa+3}\right)^i\right) &= \sum_{\kappa=5}^{40}\left((\kappa+2)\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\kappa+3}\right)^i\right) \\
\text{Γεωμετρική Σειρά} \quad &= \sum_{\kappa=5}^{40}\left((\kappa+2)\frac{1}{1-\frac{1}{\kappa+3}}\right) = \sum_{\kappa=5}^{40}\left((\kappa+2)\frac{\kappa+3}{\kappa+2}\right) = \sum_{\kappa=5}^{40}(\kappa+3) \\
&= \sum_{\kappa=1}^{40}(\kappa+3) - \sum_{\kappa=1}^{4}(\kappa+3) = \frac{40(40+1)}{2} + 3 \times 40 - \frac{4(4+1)}{2} + 12 \\
&= 20(21) + 120 - 10 + 12 = 542
\end{aligned}
$$