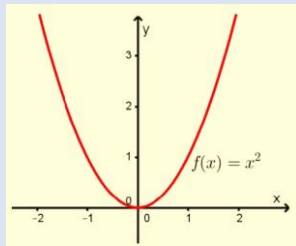


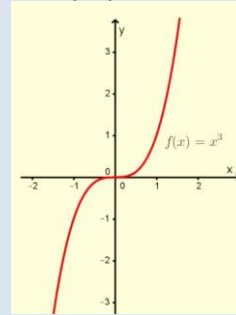
Δραστηριότητες σελ. 43-44 (Ακρότατα Συνάρτησης (ορισμοί))

1. Να βρείτε, αν υπάρχουν τα τοπικά ακρότατα των πιο κάτω συναρτήσεων:

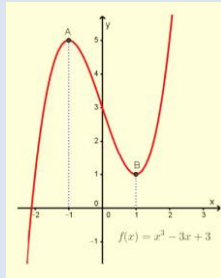
(α)



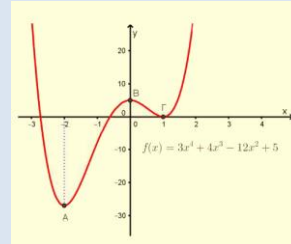
(β)



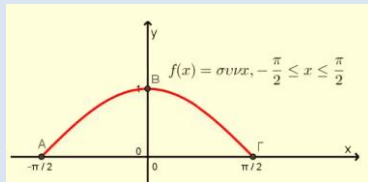
(γ)



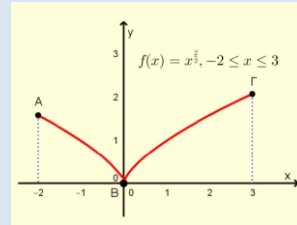
(δ)



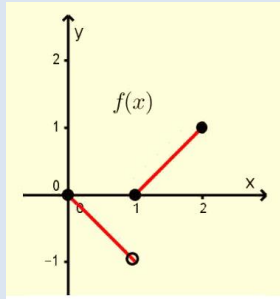
(ε)



(στ)



(ζ)



2. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας:

(α)

 Αν η f είναι συνεχής στο Δ , τότε στα άκρα του διαστήματος αυτού η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

(β)

 Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχει πεπερασμένα το πλήθος τοπικά ακρότατα, τότε το μεγαλύτερο τοπικό μέγιστο της f στο $[a, b]$ είναι και το ολικό μέγιστο της f στο διάστημα αυτό.

ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

(γ)

 Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 - 4x + 12, x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει ελάχιστη τιμή για $x = 2$, την $f(2) = 8$.

ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

(δ)

 Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ έχει ένα τουλάχιστον τοπικό ακρότατο.

ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

3. Να βρείτε, αν υπάρχουν τις ολικές ακρότατες τιμές των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α)

 $f(x) = x^2 + 4x + 6, x \in \mathbb{R}$

(β)

 $f(x) = 4 - x^2, -3 \leq x \leq 1$

Δραστηριότητες σελ. 43-44 (Ακρότατα Συνάρτησης (ορισμοί))

Οι ασκήσεις θα λυθούν σύμφωνα με τους αντίστοιχους ορισμούς (του σχολικού βιβλίου) και σύμφωνα με τον τύπο της εκάστοτε συνάρτησης και όχι οπτικά. Αυτό θα ενισχύσει τη διαίσθησή μας όσον αφορά τη χρήση του ΘΜΤ.

1.

(α) $f(x) = x^2$. Είναι $D(f) = \mathbb{R}$. Στο σημείο με $x = 0$ η συνάρτηση λαμβάνει τοπικό ακρότατο. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$ τυχόν. Τότε, για κάθε $x_1, x_2 \in (-\varepsilon, 0)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$, δηλ. η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα ενώ για $x_1, x_2 \in (0, \varepsilon)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε ότι $f(x_1) > f(x_2)$, δηλ. η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα. Συνεπώς, στο σημείο αυτό η μονοτονία της συνάρτησης αλλάζει και αρα έχουμε τοπικό ακρότατο. Ιδιαίτερα, αυτό είναι και τοπικό ελάχιστο.

(β) $f(x) = x^3$. Είναι $D(f) = \mathbb{R}$. Είδαμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το π.ο. της και συνεπώς **δεν έχει τοπικά ακρότατα**.

(γ) $f(x) = x^3 - 3x + 3$. Είναι $D(f) = \mathbb{R}$.

- Έστωσαν $x_1, x_2 \in (-2, -1)$ με $x_1 < x_2$. Δηλ. $-2 < x_1 < x_2 < -1$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Εφαρμόζοντας το ΘΜΤ στο διάστημα $[x_1, x_2]$, θα υπάρχει ένα $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

και αρα $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. Αλλά, $f'(\xi) = 3(\xi - 1)(\xi + 1) > 0$ αφού $\xi \in (x_1, x_2) \subset (-2, -1)$. Συνεπώς, αφού $0 < x_2 - x_1$, έπεται ότι $f(x_2) - f(x_1) > 0$, δηλ. $f(x_1) < f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-2, -1)$.

- Έστωσαν $x_1, x_2 \in (-1, 0)$ με $-1 < x_1 < x_2 < 0$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) > f(x_2)$. Εφαρμόζοντας το ΘΜΤ στο διάστημα $[x_1, x_2]$, θα υπάρχει ένα $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

και αρα $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. Αλλά, $f'(\xi) = 3(\xi - 1)(\xi + 1) < 0$ αφού $\xi \in (x_1, x_2) \subset (-1, 0)$. Συνεπώς, αφού $0 < x_2 - x_1$, έπεται ότι $f(x_2) - f(x_1) < 0$, δηλ. $f(x_1) > f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0)$.

Άρα, αφού η συνάρτηση αλλάζει μονοτονία σε μια περιοχή του σημείου $x = -1$ (από γν. αύξουσα σε γν. φθίνουσα), έπεται ότι η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο εκεί.

Εντελώς όμοια, αφού η συνάρτηση αλλάζει μονοτονία σε μια περιοχή του σημείου $x = 1$ (από γν. φθίνουσα σε γν. αύξουσα), έπεται ότι η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο εκεί.

(δ) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5$. Είναι $D(f) = \mathbb{R}$.

- Έστωσαν $x_1, x_2 \in (-1, -2)$ με $x_1 < x_2$. Δηλ. $x_1 < x_2 < -2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) > f(x_2)$. Εφαρμόζοντας το ΘΜΤ στο διάστημα $[x_1, x_2]$, θα υπάρχει ένα $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

και αρα $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. Αλλά, $f'(\xi) = 12\xi(\xi^2 + \xi - 2) = 2\xi(\xi + 2)(\xi - 1) > 0$ αφού $\xi \in (x_1, x_2) \subset (-1, -2)$. Συνεπώς, αφού $0 < x_2 - x_1$, έπεται ότι $f(x_2) - f(x_1) > 0$, δηλ. $f(x_1) < f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, -2)$.

Εντελώς όμοια, έχουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-2, 0)$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, 2)$. Όμως, ένα πολυώνυμο βαθμού 4 μπορεί να έχει το πολύ 3 τοπικά ακρότατα. Έτσι, σύμφωνα με τα πιο πάνω, η συνάρτηση έχει τοπικό ελάχιστο στα σημεία $(2, -27)$ και $(1, 0)$ και τοπικό μέγιστο στο σημείο $(0, 5)$.

(ε) $f(x) = \sin x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Εκ των ιδιοτήτων της συνάρτησης συνημίτονο (συνέχεια, συμπεριφορά στο 1ο και 2ο τεταρτημόριο) έχουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο σημείο $(0, 1)$ και τοπικά ελάχιστα στα σημεία $(\frac{\pi}{2}, 0)$ και $(-\frac{\pi}{2}, 0)$.

(στ) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}, -2 \leq x \leq 3$.

Τοπικό Μέγιστο στα σημεία $A(-2, f(-2)) = (-2, 2^{\frac{2}{3}})$ και $\Gamma(3, f(3)) = (3, 3^{\frac{2}{3}})$, τοπικό ελάχιστο στο $B(0, f(0)) = (0, 0)$. Για τον τελευταίο ισχυρισμό, έχουμε: αν $x \in (-1, 1) - \{0\}$, τότε $f(x) = x^{\frac{2}{3}} > f(0) = 0$

$$(ζ) f(x) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x < 1 \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Τοπικό Μέγιστο στα σημεία $(0, f(0)) = (0, 0)$ και $(2, f(2)) = (2, 1)$ και δεν έχει τοπικό ακρότατο στο $(1, f(1)) = (1, 0)$. Για τον τελευταίο ισχυρισμό, έχουμε:

$$f(1) = 0 > -x = f(x), \forall x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \subset (0, 1) \text{ και } f(1) = 0 < x-1 = f(x), \forall x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \subset (1, 2)$$

2. (α) **ΛΑΘΟΣ**. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \left(\frac{1}{x}\right), & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Είναι συνεχής στο π.ο. της (κλασικό) αλλά για τις ακολουθίες (x_n) και (y_n) με τύπους $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ και $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{3\pi}{2}}$ έχουμε ότι $f(x_n) = x_n^2 > 0$ και $f(y_n) = -y_n^2 < 0$ ενώ $\lim_n x_n = 0 = \lim_n y_n$. Με άλλα λόγια, σε **κάθε** περιοχή του 0, μπορούμε να βρούμε x_n και y_n τέτοια ώστε $f(x_n) > 0 > f(y_n)$.

(β) **ΣΩΣΤΟ**. Έπεται από τον ορισμό του ολικού μεγίστου και το γεγονός ότι συνεχής συνάρτηση σε κλειστό (και φραγμένο) διάστημα λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

(γ) **ΣΩΣΤΟ**. Είναι $f(x) = x^2 - 4x + 12 = (x-2)^2 + 8, x \in \mathbb{R}$, δηλ. το γράφημα της συνάρτησης εκφράζει παραβολή με (ολικό) ελάχιστο στο σημείο $(2, f(2)) = (2, 8)$.

(δ) **ΛΑΘΟΣ**. Π.χ. η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3$: δεν έχει τοπικά ακρότατα.

3. (α) $f(x) = x^2 + 4x + 6, x \in \mathbb{R}$. Θα αντιμετωπίσουμε το γράφημα της συνάρτησης ως το γράφημα παραβολής. Είναι

$$f(x) = x^2 + 4x + 6 = (x+2)^2 + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

και αρα το γράφημα της συνάρτησης εκφράζει παραβολή με κορυφή το σημείο $(-2, 2)$ στο οποίο παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο.

(β) Αλγεβρικά (το οποίο ανάγεται ουσιαστικά στη μελέτη της παραβολής):

$$\forall x \in [-3, 0] \text{ είναι } x^2 \in [0, 9] \Rightarrow -x^2 \in [-9, 0] \Rightarrow 4 - x^2 \in [-5, 4]$$

και

$$\forall x \in [0, 1] \text{ είναι } x^2 \in [0, 1] \Rightarrow -x^2 \in [-1, 0] \Rightarrow 4 - x^2 \in [-3, 4]$$

Έτσι, η f παρουσιάζει ολικά ελάχιστη τιμή την $f(-3) = -5$ και ολικά μέγιστη τιμή την $f(0) = 4$.