

Δραστηριότητες σελ. 22 (Θεώρημα Rolle)

- Να εξετάσετε κατά πόσο ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle για τις πιο κάτω συναρτήσεις στο δοσμένο διάστημα και να βρείτε, αν υπάρχει, την τιμή του ξ που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος:

(α) $f(x) = x^2 - 8x + 15$, στο $[3,5]$	(β) $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x}$, στο $[0,4]$
(γ) $f(x) = 1 + \eta\mu(3x)$, στο $[0, \pi]$	(δ) $f(x) = x - 2 $, στο $[1,3]$
- Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 - 5x + 4$. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ και να δείξετε ότι $f'(\xi) = 0$ για κάποιο ξ ανάμεσα στις τετμημένες αυτές.
- Να βρείτε τη σχέση των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να εφαρμόζεται το Θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[1, e]$ για τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \alpha x^2 + \beta \ln x$. Να βρείτε την τιμή του $\xi \in (1, e)$ για την οποία το Θεώρημα επαληθεύεται.
- Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας:

(α) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε, υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.	ΣΩΣΤΟ/ ΛΑΘΟΣ
(β) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, τότε, υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.	ΣΩΣΤΟ/ ΛΑΘΟΣ
(γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και το γράφημα G_f της f τέμνει τον άξονα xx' σε τρία σημεία, τότε η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο $\mathbb{R}$.	ΣΩΣΤΟ/ ΛΑΘΟΣ
- Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + 3x + 1 = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $\mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2 - \ln x = x^2$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(1, e)$.

Δραστηριότητες σελ. 22 (Θεώρημα Rolle)

- (α)** $f(x) = x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5)$, στο $[3,5]$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[3,5]$ (ως πολυωνυμική) και άρα συνεχής στο διάστημα αυτό και παραγωγίσιμη στο $(3,5)$. Επίσης, $f(3) = f(5) = 0$. Άρα, ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[3,5]$. Άρα, υπάρχει $\xi \in (3,5)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = 0$. Είναι

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2\xi - 8 = 0 \Leftrightarrow \xi = 4$$

- (β)** $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x}$, στο $[0,4]$

Στο διάστημα $[0,4]$, η συνάρτηση f είναι συνεχής και επίσης παραγωγίσιμη στο $(0,4)$. Επίσης, $f(0) = f(4) = 0$. Άρα, ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0,4]$. Άρα, $\xi \in (0,4)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = 0$. Είναι

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\xi}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\xi} = 1 \Leftrightarrow \xi = 1 \text{ αφού } \xi \in (0,4).$$

- (γ)** $f(x) = 1 + \eta\mu(3x)$, στο $[0, \pi]$. Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$ στο διάστημα $[0, \pi]$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu(3x) = -1 \Leftrightarrow \eta\mu(3x) = \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ 3x = 2\kappa\pi + \left(\pi - \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\kappa\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ (στο διάστημα $[0, \pi]$). Έτσι, πληρούνται οι υποθέσεις του του Θεωρήματος του Rolle στα διαστήματα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Αφού $f'(x) = -3\sigma\upsilon\nu(3x)$. Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0$ στα δύο αυτά διαστήματα:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(3x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(3x) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 3x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{2\kappa\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

όπου μόνο οι λύσεις $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ ανήκουν στο σύνολο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Αλλά επίσης, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

(δ) $f(x) = |x - 2|$, στο $[1, 3]$. Είναι

$$f(x) = |x - 2| = \begin{cases} x - 2, x \leq 2 \\ 2 - x, x \geq 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(3x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(3x) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 3x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{2\kappa\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

όπου μόνο οι λύσεις $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ ανήκουν στο σύνολο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Αλλά επίσης, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Άρα, οι τιμές που ψάχνουμε είναι οι $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$.

- 2.** $f(x) = x^2 - 5x + 4$. Είναι $D(f) = \mathbb{R}$ και $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι
 $f(x) = x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, 4]$ (ως πολωνυμική) και άρα συνεχής στο διάστημα αυτό και παραγωγίσιμη στο $(1, 4)$. Επίσης, $f(1) = f(4) = 0$. Άρα, ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[1, 4]$ και άρα $f'(\xi) = 0$ για κάποιο $\xi \in (1, 4)$.

- 3.** Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \alpha x^2 + \beta \ln x$. Για κάθε τιμή των α και β , η f είναι καλά ορισμένη στο $[1, e]$. Υποθέτουμε ότι $\alpha \cdot \beta \neq 0$ ¹ αφού τότε η f θα ήταν ταυτοτικά ίση με τη μηδενική συνάρτηση. Επίσης, είναι $\blacksquare$ f συνεχής στο $[1, e]$, $\blacksquare$ f παραγωγίσιμη στο $(1, e)$ και άρα για να εφαρμόζεται το Θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[1, e]$, θα πρέπει $f(1) = f(e)$. Αλλά,

$$f(1) = f(e) \Leftrightarrow \alpha = \alpha e^2 + \beta \Leftrightarrow \alpha(1 - e^2) = \beta \Leftrightarrow \alpha = \frac{\beta}{1 - e^2}$$

Για α και β τα οποία ικανοποιούν τη σχέση αυτή, έχουμε από το Θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[1, e]$

$$\exists \xi \in (1, e) \text{ τέτοιος ώστε } f'(\xi) = 0$$

Αλλά, $\forall x \in [1, e]$,

$$f'(x) = 2\alpha x + \frac{\beta}{x}$$

και άρα

¹ Δηλ. τα α και β δεν μπορούν να είναι ταυτόχρονα ίσα με μηδέν

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha\xi + \frac{\beta}{\xi} = 0 \stackrel{\xi > 0}{\Leftrightarrow} 2\alpha\xi^2 + \beta = 0 \Leftrightarrow \xi^2 = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{2\frac{\beta}{1-e^2}} = \frac{e^2-1}{2} \stackrel{\xi > 0}{\Leftrightarrow} \xi = \sqrt{\frac{e^2-1}{2}}$$

4. **(α) ΣΩΣΤΟ** γιατί αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ αυτόματα θα είναι συνεχής στο σύνολο αυτό και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του.

(β) ΛΑΘΟΣ: Αντιπαράδειγμα: η (ταυτοτική) συνάρτηση $f(x) = x, \forall x \in [0,1]$. Είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ και $f'(x) = 1, \forall x \in [0,1]$.

(γ) ΣΩΣΤΟ. Απόδειξη: Έστωσαν x_1, x_2, x_3 ρίζες της εξίσωσης $f = 0$. Υποθέτουμε χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι $x_1 < x_2 < x_3$. Εφαρμόζοντας το Θεωρήμα του Rolle στα διαστήματα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$ έπεται το ζητούμενο.

Σημείωση: Αν αντικαταστήσουμε την υπόθεση της παραγωγισιμότητας της f στο $\mathbb{R}$ με την ασθενέστερη, αυτή της συνέχειας της f στο $\mathbb{R}$, τότε το αποτέλεσμα παύει να ισχύει.

5. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 + 3x + 1$. Θα δείξουμε ότι η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $f(-1) = -3 < 0$ και $f(1) = 5 > 0$. Έτσι, $f(-1)f(1) < 0$ και αρα, από το Θεώρημα του Bolzano, η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$. Υποθέτουμε τώρα προς άτοπο ότι η f έχει δύο διακεκριμένες ρίζες x_1 και x_2 (στο $\mathbb{R}$). Χωρίς απώλεια της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $x_1 < x_2$. Έτσι, θεωρούμε το διάστημα $[x_1, x_2]$ στο οποίο όπως εύκολα μπορούμε να δούμε, πληρούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle $\Rightarrow$ υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ με $f'(\xi) = 0$. Αλλά,

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3\xi^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow 3(\xi^2 + 1) = 0$$

άτοπο, αφού $\xi^2 + 1 > 0$ για κάθε τιμή του ξ . Άρα, η συνάρτηση έχει το πολύ μια λύση στο $\mathbb{R}$. Όμως, πιο πάνω, βρήκαμε ότι η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$, άρα θα είναι και η μοναδική ρίζα της f , δηλ. η μοναδική λύση της εξίσωσης $x^3 + 3x + 1 = 0$.

6. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2 - \ln x - x^2$. Είναι $f(1) = 1 > 0$ και $f(e) = 1 - e^2 < 0$ και άρα αφού η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[1, e]$, η συνάρτηση f τέμνει τουλάχιστον μια φορά τον άξονα των τετμημένων, δηλ. η εξίσωση $f(x)$ έχει μια τουλάχιστον (πραγματική) λύση. Θα δείξουμε ότι είναι και μοναδική. Αν η f έχει δύο **διαφορετικές** ρίζες x_1, x_2 στο διάστημα $(1, e)$, δηλ. $f(x_1) = 0 = f(x_2)$. Χωρίς απώλεια της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $x_1 < x_2$. Έτσι, θεωρούμε το διάστημα $[x_1, x_2] \subseteq (1, e)$ στο οποίο πληρούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle $\Rightarrow$ υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ με $f'(\xi) = 0$. Αλλά

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x} - 2x = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

η οποία είναι αδύνατο (στο $\mathbb{R}$). Άρα, η συνάρτηση έχει το πολύ μια λύση στο διάστημα $(-1,1)$. Αυτό σε συνδυασμό με το ότι έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα αυτό, μας δίνει ότι έχει μοναδική λύση (στο διάστημα αυτό).