

**Προτεινόμενες Λύσεις Α' Τεύχους  
Γ Λυκείου Κατεύθυνσης**

Οι ακόλουθες προτάσεις λύσεων αφορούν το 'Τεύχος **A**' του νέου βιβλίου της Γ' Λυκείου κατεύθυνσης (έκδοση 2018-αναθεώρηση 2019)' όπως αυτό έχει αναρτηθεί στην ιστοσελίδα του Υπουργείου Παιδείας, Πολιτισμού, Αθλητισμού και Νεολαίας της Κύπρου

**<http://mathm.schools.ac.cy/index.php/el/yliko/didaktiko-yliko>**

Στην ίδια ιστοσελίδα, υπάρχουν απαντήσεις των ασκήσεων αυτών, από τις οποίες όμως απουσιάζουν υποδείξεις για τις Θεωρητικές (αποδεικτικές) ασκήσεις (οι χωρίς αναζήτηση αριθμητικού αποτελέσματος) και κατεπέκτασιν, υποδείξεις για τις ασκήσεις 'Εμπλουτισμού', αφού οι πλείστες από αυτές είναι αποδεικτικές.

Οι λύσεις αυτές αντανακλούν την προσωπική ενασχόληση του συγγραφέα με το αντικείμενο και δίνονται για χάρην πληρότητας **και μόνο** (για την αντιπαραβολή λύσεων, άντληση ιδεών).

Λύσεις, αναθεωρήσεις και εναλλακτικές λύσεις θα αναρτώνται (για ελεύθερη χρήση) στον ακόλουθο σύνδεσμο:

**<https://ioakimioannis.com>**

Σχόλια και παρατηρήσεις με σκοπό τη βελτίωσή τους μπορούν να σταλούν στην ηλεκτρονική διεύθυνση

**[yiannis.ioakim.math@gmail.com](mailto:yiannis.ioakim.math@gmail.com)**

## - ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ -

### **Μέρος Ι - Διαφορικός Λογισμός..... 4**

|                                                                                   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----|
| Δραστηριότητες σελ. 16 (Απροσδιόριστες Μορφές - Ο κανόνας του De L'Hôpital) ..... | 6  |
| Δραστηριότητες σελ. 22 (Θεώρημα Rolle) .....                                      | 13 |
| Δραστηριότητες σελ. 28 (Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού) .....        | 17 |
| Δραστηριότητες σελ. 36 (Μονοτονία Συνάρτησης) .....                               | 20 |
| Δραστηριότητες σελ. 43-44 (Ακρότατα Συνάρτησης (ορισμοί)) .....                   | 24 |
| Δραστηριότητες σελ. 58-59 (Μονοτονία-Ακρότατα Συνάρτησης) .....                   | 27 |
| Δραστηριότητες σελ. 72 (Κυρτότητα Συνάρτησης) .....                               | 34 |
| Δραστηριότητες σελ. 83-84 (Ασύμπτωτες Συνάρτησης) .....                           | 39 |
| Δραστηριότητες σελ. 97 (Γραφική Παράσταση Συνάρτησης) .....                       | 44 |
| Δραστηριότητες σελ. 105 - 106 (Προβλήματα Ακροτάτων) .....                        | 56 |
| Δραστηριότητες σελ. 107-108 (Ενότητας) .....                                      | 61 |
| Δραστηριότητες σελ. 109 (Εμπλουτισμού) .....                                      | 67 |

### **Μέρος ΙΙ - Αντίστροφες Τριγωνομετρικές συναρτήσεις..... 69**

|                                                                                   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----|
| Δραστηριότητες σελ. 120 (Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις) .....           | 70 |
| Δραστηριότητες σελ. 124 (Παράγωγος αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων) ..... | 73 |
| Δραστηριότητες σελ. 124 (Ενότητας) .....                                          | 76 |
| Δραστηριότητες σελ. 126 (Εμπλουτισμού) .....                                      | 78 |

## Μέρος Ι - Διαφορικός Λογισμός

**Δραστηριότητες σελ. 16 (Απροσδιόριστες Μορφές - Ο κανόνας του De L'Hospital)**

1. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(α)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$

(β)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

(γ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{e^x - 1}$

2. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(α)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 + x - 2}$

(β)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\eta\mu(x - 2)}$

(γ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu(x^2)}{x^2 \eta\mu(x^2)}$

(δ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\eta\mu x}}{x - \eta\mu x}$

3. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \ln x}{x + \ln x}$

(β)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{e^x}$

(γ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{2x})}{x}$

(δ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

(ε)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - e^{-x}}{x^2}$

4. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(α)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot e^x)$

(β)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta\mu x \cdot \ln x)$

(γ)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

(δ)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\eta\mu x} \right)$

5. Να βρείτε την τιμή του  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9x - 3\eta\mu(3x)}{5x^3}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο  $x = 0$ .

6. Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) + \alpha x + \beta x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Δραστηριότητες σελ. 16 (Απροσδιόριστες Μορφές - Ο κανόνας του De L'Hôpital)

**1. (α)** Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 5x + 6) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 0$$

και αρα το  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$  αποτελεί απροσδιοριστία τύπου  $\frac{0}{0}$ .

**A' τρόπος Υπολογισμού (με τεχνικές υπολογισμού ορίων)**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x+2} = \frac{2-3}{2+2} = -\frac{1}{4}$$

**B' τρόπος Υπολογισμού**

Εφαρμόζουμε τον κανόνα του DeL'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 5x + 6)'}{(x^2 - 4)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 5}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 5}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 2 - 5}{2} = -\frac{1}{4}$$

**(β)** Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} - 1) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

και αρα το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$  αποτελεί απροσδιοριστία τύπου  $\frac{0}{0}$ .

**A' τρόπος Υπολογισμού (με τεχνικές υπολογισμού ορίων)** Πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1) \cdot (\sqrt{1+x} + 1)}{x \cdot (\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x})^2 - 1^2}{x \cdot (\sqrt{1+x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x \cdot (\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**B' τρόπος Υπολογισμού:** Εφαρμόζουμε τον κανόνα του DeL'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)'}{(x)'} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}$$

**(γ)** Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

και αρα το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{e^x - 1}$  αποτελεί απροσδιοριστία τύπου  $\frac{0}{0}$ . Με τα εργαλεία που γνωρίζουμε στο επίπεδό μας, δεν μπορούμε να αποφανθούμε εύκολα αν συγκλίνει ή όχι το πιο πάνω όριο και στην περίπτωση που αυτό συγκλίνει, ποιά είναι η τιμή του. Αλλά, εφαρμόζοντας τον κανόνα του DeL'Hospital, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + x)'}{(e^x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 1}{e^x} = \frac{2 \cdot 0 + 1}{e^0} = 1$$

**2. (α)** Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = \ln 1 = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - 2) = 0$$

και αρα το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 + x - 2}$  αποτελεί απροσδιοριστία τύπου  $\frac{0}{0}$ . Εφαρμόζουμε τον κανόνα του DeL'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)'}{(x^2 + x - 2)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x \cdot (2x + 1)} = \frac{1}{1(2 \cdot 1 + 1)} = \frac{1}{3}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{(x+2)(x-1)}$$

**(β)** Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\eta\mu(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{(x-2)}{\eta\mu(x-2)} \cdot (x+2) \right)$$

Για το δε όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{\eta\mu(x-2)}$  θεωρούμε το μετασχηματισμό  $h = x - 2$ . Είναι  $\lim_{x \rightarrow 2} h = 0$  και αρα

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{\eta\mu(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta\mu x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

ενώ το δε όριο

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 2+2 = 4$$

Συνεπώς, αφού τα 2 αυτά όρια υπάρχουν, έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{(x-2)}{\eta\mu(x-2)} \cdot (x+2) \right) = \left( \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{\eta\mu(x-2)} \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) \right) = 1 \cdot 4 = 4$$

**(γ)** θεωρούμε το μετασχηματισμό  $h = x^2$ . Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} h = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  και αρα

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu(x^2)}{x^2 \eta\mu(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x \eta\mu x}$$

Αλλά,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sigma\upsilon\nu x) = 0 - \sigma\upsilon\nu 0 = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} (x \eta\mu x) = 0$$

και αρα το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x \eta\mu x}$  αποτελεί απροσδιοριστία τύπου  $\frac{0}{0}$ . Εφαρμόζουμε τον κανόνα του DeL'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x \eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sigma\upsilon\nu x)'}{(x \eta\mu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + x \sigma\upsilon\nu x}$$

Αλλά,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu x) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu x + x \sigma\upsilon\nu x) = 0$$

και αρα το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + x \sigma\upsilon\nu x}$  αποτελεί απροσδιοριστία τύπου  $\frac{0}{0}$ . Εφαρμόζουμε τον κανόνα του

DeL'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + x \sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\eta\mu x)'}{(\eta\mu x + x \sigma\upsilon\nu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{2\sigma\upsilon\nu x - x \eta\mu x} = \frac{\sigma\upsilon\nu 0}{2\sigma\upsilon\nu 0 - 0\eta\mu 0} = \frac{1}{2}$$

**Διαφορετικά,**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x \eta\mu x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x \eta\mu x} \cdot \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{x \eta\mu x (1 + \sigma\upsilon\nu x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x}{x \eta\mu x (1 + \sigma\upsilon\nu x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \sigma\upsilon\nu x} \right) \end{aligned}$$

Το δε όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

ενώ το δε όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{1 + \sigma\upsilon\nu 0} = \frac{1}{2}$$

Συνεπώς, αφού τα 2 αυτά όρια υπάρχουν, έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \sigma\upsilon\nu x} \right) = \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sigma\upsilon\nu x} \right) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

**(δ)** Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - e^{\eta\mu x}) = e^0 - e^{\frac{0}{1}} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} (x - \eta\mu x) = 0 - \eta\mu 0 = 0$$

και αρα το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\eta\mu x}}{x - \eta\mu x}$  αποτελεί απροσδιοριστία τύπου  $\frac{0}{0}$ . Εφαρμόζουμε τον κανόνα του DeL'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\eta\mu x}}{x - \eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{\eta\mu x})'}{(x - \eta\mu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (\eta\mu x)' e^{\eta\mu x}}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sigma\upsilon\nu x e^{\eta\mu x}}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$$

Αλλά,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - \sin x e^{\eta \mu x}) = e^0 - \underbrace{\sin 0}_1 \cdot e^{\eta \mu 0} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x) = 0 - \sin 0 = 0$$

και αρα το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x e^{\eta \mu x}}{1 - \sin x}$  αποτελεί απροσδιοριστία τύπου  $\frac{0}{0}$ . Εφαρμόζουμε τον κανόνα του DeL'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x e^{\eta \mu x}}{1 - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - \sin x e^{\eta \mu x})'}{(1 - \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \eta \mu x e^{\eta \mu x} - \sin^2 x e^{\eta \mu x}}{\eta \mu x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{\eta \mu x} (\eta \mu x - \sin^2 x)}{\eta \mu x} \end{aligned}$$

Αλλά,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + e^{\eta \mu x} (\eta \mu x - \sin^2 x)) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \eta \mu x = 0$$

και αρα το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{\eta \mu x} (\eta \mu x - \sin^2 x)}{\eta \mu x}$  αποτελεί απροσδιοριστία τύπου  $\frac{0}{0}$ . Εφαρμόζουμε τον κανόνα του DeL'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{\eta \mu x} (\eta \mu x - \sin^2 x)}{\eta \mu x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + e^{\eta \mu x} (\eta \mu x - \sin^2 x))'}{(\eta \mu x)'} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\eta \mu x} (3\eta \mu (2x) - 2\sin^3 x + 2\sin x) + 2e^x}{\sin x} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\eta \mu 0} (3\eta \mu 0 - 2\sin^3 0 + 2\sin 0) + 2e^0}{\sin 0} = 1 \end{aligned}$$

Διαφορετικά,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\eta \mu x}}{x - \eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{1 - e^{\eta \mu x - x}}{x - \eta \mu x}$$

Για το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\eta \mu x - x}}{x - \eta \mu x}$$

θεωρούμε το μετασχηματισμό  $h = x - \eta \mu x$ . Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} h = \lim_{x \rightarrow 0} (x - \eta \mu x) = 0$  ή αφού  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (x - \eta \mu x) = 0$ . Έτσι,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\eta \mu x - x}}{x - \eta \mu x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^h}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

Το δε όριο υπολογίζεται με τον κανόνα του DeL'Hospital (αποτελεί απροσδιοριστία τύπου  $\frac{0}{0}$ ):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^h - 1)'}{(h)'} = \lim_{h \rightarrow 0} e^h = e^0 = 1$$

ή παρατηρώντας ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{0+h} - e^0}{h} = \left. \frac{de^x}{dx} \right|_{x=0} = e^0 = 1$$

ενώ το δε όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1$$

Συνεπώς, αφού τα 2 αυτά όρια υπάρχουν, έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{1 - e^{\eta \mu x - x}}{x - \eta \mu x} = \left( \lim_{x \rightarrow 0} e^x \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\eta \mu x - x}}{x - \eta \mu x} \right) = 1 \cdot 1 = 1$$

### 3. (α) Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + \ln x) = 2 \cdot (+\infty) + \infty = +\infty \text{ και ομοίως } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + \ln x) = +\infty$$

και αρα το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \ln x}{x + \ln x}$  αποτελεί απροσδιοριστία τύπου  $\frac{+\infty}{+\infty}$ . Εφαρμόζουμε τον κανόνα του DeL'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \ln x}{x + \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x + \ln x)'}{(x + \ln x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{2}{1} = 2$$

(β) Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln(\frac{2}{e})} = e^{\ln(\frac{2}{e}) \lim_{x \rightarrow +\infty} x} = 0$$

αφού  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  και

$$2 < e \implies \ln 2 < \ln e \Rightarrow \ln 2 - \ln e < 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{2}{e}\right) < 0$$

(γ) Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{2x}) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

και αρα το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{2x})}{x}$  αποτελεί απροσδιοριστία τύπου  $\frac{+\infty}{+\infty}$ . Εφαρμόζουμε τον κανόνα του

DeL'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{2x})}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(1 + e^{2x})]'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^{-2x}}{e^{-2x} + 1} \right) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{-2x}} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} = 2 \cdot \frac{1}{1 + 0} = 2 \end{aligned}$$

(δ) Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

ή

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0}} = 1$$

Αν δοκιμάζαμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του DeL'Hospital θα είχαμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)} = +\infty$$

και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = (-\infty)^2 = +\infty$$

και αρα το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$  αποτελεί απροσδιοριστία τύπου  $\frac{+\infty}{+\infty}$ . Εφαρμόζουμε τον κανόνα του

DeL'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(\sqrt{x^2 + 1})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x}$$

το οποίο αποτελεί απροσδιοριστία τύπου  $\frac{+\infty}{+\infty}$ . Εφαρμόζουμε τον κανόνα του DeL'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\frac{1}{2x})'}{(\frac{1}{2x})'} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

όπου επιστρέψαμε στο αρχικό μας όριο.

(ε) Είναι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - e^{-x}) = (-\infty) - e^{-(-\infty)} = (-\infty) - e^{+\infty} = (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = (-\infty)^2 = +\infty$$

και αρα το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - e^{-x}}{x^2}$  αποτελεί απροσδιοριστία τύπου  $\frac{-\infty}{+\infty}$ . Εφαρμόζουμε τον κανόνα του

DeL'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - e^{-x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x - e^{-x})'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + e^{-x}}{2x}$$

το οποίο εύκολα βλέπουμε ότι αποτελεί απροσδιοριστία τύπου  $\frac{+\infty}{+\infty}$ . Εφαρμόζουμε τον κανόνα του DeL'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + e^{-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1 + e^{-x})'}{(2x)'} = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{2} = -\frac{1}{2}e^{-(-\infty)} = -\frac{1}{2}e^{+\infty} = -\frac{1}{2}(+\infty) = -\infty$$

Διαφορετικά,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - e^{-x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} \right)$$

Αλλά,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

και για το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x^2}$  εφαρμόζουμε δις τον κανόνα του DeL'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^{-x})'}{(x^2)'} = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{2x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^{-x})'}{(x)'} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

και έτσι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - e^{-x}}{x^2} = 0 - (+\infty) = -\infty$$

#### 4. (α) Το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x$$

το οποίο αποτελεί Α.Μ. τύπου  $(-\infty) \cdot 0$ . Γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}}$$

το οποίο αποτελεί Α.Μ. τύπου  $\frac{-\infty}{+\infty}$  και αρα μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$$

(β) Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta\mu x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln x}{\frac{1}{\eta\mu x}} \right)$$

(ξαναγράφουμε το όριο για να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα) και αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\eta\mu x} = +\infty$$

το όριο αποτελεί απροσδιοριστία τύπου  $\frac{-\infty}{+\infty}$ . Εφαρμόζουμε τον κανόνα του DeL'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\eta\mu x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\eta\mu x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\sigma\varphi x \cdot \sigma\tau\epsilon\mu x} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x\sigma\varphi x}$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \eta\mu x = 0$ . Επίσης, (ξαναγράφουμε το όριο για να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x\sigma\varphi x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\epsilon\varphi x}$$

το οποίο αποτελεί απροσδιοριστία τύπου  $\frac{0}{0}$ . Εφαρμόζουμε τον κανόνα του DeL'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\epsilon\varphi x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\tau\epsilon\mu^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$$

έπεται ότι

$$-\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x\sigma\varphi x} = -\frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} \eta\mu x}{\lim_{x \rightarrow 0^+} x\sigma\varphi x} = -\frac{0}{1} = 0$$

(γ) Αφού

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( 1 + \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} \right)$$

Για το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}$  έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x - x + 1) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1} ((x-1)\ln x)$$

και αρα εφαρμόζουμε τον κανόνα του DeL'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \frac{0}{0} \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}$$

και αρα

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} (1) + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(δ) Είναι (ξαναγράφουμε το όριο για να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x - x}{x\eta\mu x}$$

το οποίο αποτελεί απροσδιοριστία τύπου  $\frac{0}{0}$ . Εφαρμόζουμε τον κανόνα του DeL'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x - x}{x\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x}$$

το οποίο αποτελεί απροσδιοριστία τύπου  $\frac{0}{0}$ . Εφαρμόζουμε τον κανόνα του DeL'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{2\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x} = \frac{\eta\mu 0}{2\sigma\upsilon\nu 0 - 0\eta\mu 0} = \frac{0}{2} = 0$$

5. Για να είναι συνεχής η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9x - 3\eta\mu(3x)}{5x^3}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$$

στο  $x = 0$ , πρέπει  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ . Αλλά,  $f(0) = \alpha$  και

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x - 3\eta\mu(3x)}{5x^3} = \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \eta\mu(3x)}{x^3}$$

Είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \eta\mu(3x)}{x^3} &\stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 3\sigma\upsilon\nu(3x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu(3x)}{x^2} = \frac{0}{0} \\ &\stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\eta\mu(3x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9}{2} \frac{\eta\mu(3x)}{3x} = \frac{9}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\text{και αρα } \alpha = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{3}{5} \cdot \frac{9}{2} = \frac{27}{10}$$

6. Για κάθε τιμή των  $\alpha$  και  $\beta$ , το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) + \alpha x + \beta x^2}{x^2}$$

αποτελεί απροσδιόριστη μορφή τύπου  $\frac{0}{0}$ . Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(x+1) + \alpha x + \beta x^2)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1} + \alpha + 2\beta x}{2x}$$

Αν  $\alpha = -1$ , το πιο πάνω όριο αποτελεί απροσδιόριστη μορφή τύπου  $\frac{0}{0}$ . Στην περίπτωση αυτή, είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( \frac{1}{x+1} + \alpha + 2\beta x \right)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(x+1)^2} + 2\beta}{2} = \frac{-1 + 2\beta}{2}$$

Άρα, αν  $\alpha = -1$ , τότε από τον κανόνα του DeL'Hospital το ανωτέρω όριο **υπάρχει** και είναι ίσο με  $\frac{2\beta-1}{2}$ . Έτσι,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) + \alpha x + \beta x^2}{x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2\beta-1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta = 1.$$

**Σημείωση:** Αν το  $\alpha = -1$ , τότε το όριο είναι το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - x + \beta x^2}{x^2}$$

Αλλά, όπως εύκολα μπορούμε να δούμε, από τον κανόνα του DeL'Hospital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta x^2}{x^2} = \beta$$

για κάθε τιμή του  $\beta$ . Έτσι, το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - x + \beta x^2}{x^2}$  υπάρχει και είναι ίσο με

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta x^2}{x^2} = -\frac{1}{2} + \beta = \frac{2\beta-1}{2}$$

και καταλήγουμε όπως και πριν στο ότι  $\beta = 1$ .

Αν  $\alpha \neq -1$ , τότε μπορούμε να αποδείξουμε ότι (για οποιαδήποτε τιμή του  $\beta$ ) το όριο δεν είναι πεπερασμένο.