

## Δραστηριότητες σελ. 57-59 (Ενότητας)

**1.**

$$(α) \quad \int 9x^2 \sqrt{x^3 + 5} dx = 3 \int 3x^2 \sqrt{x^3 + 5} dx = 3 \int \sqrt{x^3 + 5} d(x^3 + 5) = 2(x^3 + 5)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$(β) \quad \int \left( \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{\sqrt{\ln x}}{x} \right) dx = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx - \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα, θεωρούμε την αντικατάσταση  $u(x) = e^x \Leftrightarrow du = e^x dx$ . Τότε,

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln(1+e^x) + c \text{ και για το δεύτερο,}$$

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx = \int \sqrt{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx = \int \sqrt{\ln x} d(\ln x) = \frac{2}{3} (\ln x)^{\frac{3}{2}} + c$$

και αρα 
$$\int \left( \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{\sqrt{\ln x}}{x} \right) dx = \ln(1+e^x) + \frac{2}{3} (\ln x)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$(γ) \quad \int \frac{\eta \mu^3 x}{\sigma \nu \nu^2 x} dx = \int \frac{\eta \mu^2 x}{\sigma \nu \nu^2 x} \cdot \eta \mu x dx = \int \varepsilon \varphi^2 x \cdot \eta \mu x dx = \int (\tau \varepsilon \mu^2 x - 1) \cdot \eta \mu x dx$$

$$= \int \tau \varepsilon \mu x \cdot \varepsilon \varphi x dx - \int \eta \mu x dx$$

Αλλά,

$$\int \frac{1}{\eta \mu x} \cdot \frac{\eta \mu x}{\sigma \nu \nu x} dx + \sigma \nu \nu x = \int \frac{\eta \mu x}{\sigma \nu \nu^2 x} dx = - \int \frac{1}{\sigma \nu \nu^2 x} d(\sigma \nu \nu x) = \frac{1}{\sigma \nu \nu x} + c = \tau \varepsilon \mu x + c$$

και  $\int \eta \mu x dx = \sigma \nu \nu x + c$ . Συνεπώς,  $\int \frac{\eta \mu^3 x}{\sigma \nu \nu^2 x} dx = \tau \varepsilon \mu x + \sigma \nu \nu x + c$

$$(δ) \quad I = \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx \int \frac{e^x}{e^x(e^x + e^{-x})} dx = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$$

Θεωρούμε την αντικατάσταση  $u(x) = e^x \Leftrightarrow du = e^x dx$ . Τότε,

$$I = \int \frac{du}{u^2 + 1} = \text{τοξεφ}(u) + c = \text{τοξεφ}(e^x) + c$$

$$(ε) \quad \int \sqrt{x} \cdot \sqrt{x^{\frac{3}{2}} + 1} dx = \frac{2}{3} \int \sqrt{x^{\frac{3}{2}} + 1} d\left(x^{\frac{3}{2}} + 1\right) = \frac{2}{3} \left(x^{\frac{3}{2}} + 1\right)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$(στ) \quad I = \int \sigma \nu \nu \sqrt{x} dx. \text{ Θεωρούμε την αντικατάσταση } u = \sqrt{x} \Leftrightarrow du = \frac{dx}{2u} \text{ και αρα}$$

$$I = 2 \int u \sigma \nu \nu u du = 2 \int u \cdot (\eta \mu u)' du = 2 \int u \cdot (\eta \mu u)' du = 2u \cdot \eta \mu u - 2 \int \eta \mu u \cdot (u)' du$$

$$= 2u \cdot \eta \mu u - 2 \int \eta \mu u du = 2u \cdot \eta \mu u + 2\sigma \nu \nu u + c = 2(\sqrt{x} \cdot \eta \mu \sqrt{x} + \sigma \nu \nu \sqrt{x}) + c$$

$$(ζ) \quad I = \int \eta \mu x \sigma \nu \nu x e^{\eta \mu x} dx. \text{ Θεωρούμε την αντικατάσταση } u = \eta \mu x \Leftrightarrow \sigma \nu \nu x dx = du \text{ και αρα}$$

$$I = \int u e^u du = \int u \cdot (e^u)' du = u e^u - \int e^u du = u e^u - e^u = e^u(u - 1) + c = e^{\eta\mu x}(\eta\mu x - 1) + c$$

$$(η) \quad I = \int 4x^3 \sqrt{1+x^2} dx = 4 \int x^3 \sqrt{1+x^2} dx = 4 \int x \cdot x^2 \sqrt{1+x^2} dx$$

Θεωρούμε την αντικατάσταση  $u(x) = 1 + x^2 \Leftrightarrow du = 2x dx \Leftrightarrow x dx = \frac{du}{2}$  και  $x^2 = u(x) - 1$  Τότε,

$$\begin{aligned} I &= 2 \int (u-1) \sqrt{u} du = 2 \int \left(u^{\frac{3}{2}} - \sqrt{u}\right) du = 2 \cdot \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} - 2 \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{4}{5} (1+x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c \\ &= \frac{4}{15} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} (3x^2 - 2) + c \end{aligned}$$

Διαφορετικά, ακολουθούμε τον εναλλακτικό τρόπο αντιμετώπισης τέτοιων ολοκληρωμάτων (με ομοιοθεσία) όπως είδαμε στη θεωρία:

$$\begin{aligned} I &= \int 4x^3 \sqrt{1+x^2} dx = 4 \int x^3 \sqrt{1+x^2} dx = 4 \int x \cdot x^2 \sqrt{1+x^2} dx = 4 \int x \cdot (x^2 + 1 - 1) \sqrt{1+x^2} dx \\ &= 4 \int x \cdot (x^2 + 1) \sqrt{1+x^2} dx - 4 \int x \sqrt{1+x^2} dx = 4 \int x \cdot (1+x^2)^{\frac{3}{2}} dx - 4 \int x \sqrt{1+x^2} dx \\ &= 2 \int (1+x^2)^{\frac{3}{2}} d(1+x^2) - 2 \int \sqrt{1+x^2} d(1+x^2) = \frac{4}{5} (1+x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (θ) \quad \int \eta\mu^7 x \sigma\upsilon\nu^3 x dx &= \int \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu^7 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \int \eta\mu^7 x \cdot (1 - \eta\mu^2 x) \cdot \sigma\upsilon\nu x dx \\ &= \int (\eta\mu^7 x - \eta\mu^9 x) d(\eta\mu x) = \frac{\eta\mu^8 x}{8} - \frac{\eta\mu^{10} x}{10} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ι) \quad \int \eta\mu(7x) \sigma\upsilon\nu(3x) dx &= \frac{1}{2} \int [\eta\mu(7x - 3x) + \eta\mu(7x + 3x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int [\eta\mu(4x) + \eta\mu(10x)] dx = -\frac{1}{8} \sigma\upsilon\nu(4x) - \frac{1}{20} \sigma\upsilon\nu(10x) + c \end{aligned}$$

$$(ια) \quad \int \frac{\eta\mu^4 x}{\sigma\upsilon\nu^6 x} dx = \int \varepsilon\varphi^4 x \tau\epsilon\mu^2 x dx = \int \varepsilon\varphi^4 x d(\varepsilon\varphi x) = \frac{\varepsilon\varphi^5 x}{5} + c$$

$$(ιβ) \quad \int \eta\mu(2x) \sigma\upsilon\nu^6 x dx = 2 \int \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu^6 x dx = -2 \int \sigma\upsilon\nu^7 x d(\sigma\upsilon\nu x) = -\frac{\sigma\upsilon\nu^8 x}{4} + c$$

$$(ιγ) \quad \int \sqrt{1 - \eta\mu(2x)} dx = \int \sqrt{(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2} dx = \int (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) dx = -\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + c$$

Χρησιμοποιήσαμε το ότι  $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  και το ότι

$$(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2 = \eta\mu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu(2x)$$

**Σημείωση:** στη λύση του ΥΠΠΑΝ δίνεται

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + c$$

$$(ιδ) \quad \int (x^2 + 1)e^x dx = \int x^2 e^x dx + \int e^x dx$$

Το  $\int x^2 e^x dx$  υπολογίζεται εύκολα με 2 εφαρμογές ολοκλήρωσης κατά μέρη:

$$\int e^x \cdot x^2 dx = e^x \cdot x^2 - 2xe^x + 2e^x + c \text{ και } \int e^x dx = e^x + c. \text{ Συνεπώς,}$$

$$\int (x^2 + 1)e^x dx = e^x \cdot x^2 - 2xe^x + 3e^x + c = (x^2 - 2x + 3)e^x + c$$

(ιε)

$$\begin{aligned} I &= \int e^{ax} \eta\mu(\beta x) dx = \int \eta\mu(\beta x) \cdot \frac{1}{a} e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \eta\mu(\beta x) - \frac{1}{a} \int e^{ax} \cdot (\eta\mu(\beta x))' dx \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \eta\mu(\beta x) - \frac{\beta}{a} \int e^{ax} \cdot \sigma\upsilon\nu(\beta x) dx = \frac{1}{a} e^{ax} \eta\mu x - \frac{\beta}{a} \int \left(\frac{1}{a} e^{ax}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(\beta x) dx \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \eta\mu(\beta x) - \frac{\beta}{a^2} \int e^{ax} \cdot (\eta\mu(\beta x))' dx = \frac{1}{a} e^{ax} \eta\mu(\beta x) - \frac{\beta}{a^2} (e^{ax} \cdot \sigma\upsilon\nu(\beta x) - \beta \int e^{ax} \cdot \sigma\upsilon\nu(\beta x) dx) \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \eta\mu(\beta x) - \frac{\beta}{a^2} e^{ax} \cdot \sigma\upsilon\nu(\beta x) - \frac{\beta^2}{a^2} I \end{aligned}$$

και αρα,  $I = \frac{e^{ax}}{a^2 + \beta^2} (\beta \sigma\upsilon\nu(\beta x) + a \eta\mu(\beta x)) + c$

(ιστ)

$$\begin{aligned} \int \tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu x dx &= \int \tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu x \cdot (x)' dx = \tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu x \cdot x - \int x \cdot (\tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu x)' dx \\ &= \tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu x \cdot x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu x \cdot x + \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu x \cdot x - \sqrt{1-x^2} + c \end{aligned}$$

(ιζ)

$$\int \frac{1}{(x-1)^2(x-2)} dx = \int \left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{1}{x-1} + \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + c$$

(ιη)

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^2+2x+10} dx &= \int \frac{x+1-2}{x^2+2x+10} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+10} dx - 2 \int \frac{dx}{x^2+2x+10} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+2x+10)}{x^2+2x+10} - 2 \int \frac{dx}{(x+1)^2-9} = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+10) - \frac{2}{9} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2-1} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+10) - \frac{2}{3} \int \frac{d\left(\frac{x+1}{3}\right)}{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2-1} = \ln \sqrt{x^2+2x+10} - \frac{2}{3} \tau\omicron\xi\epsilon\varphi\left(\frac{x+1}{3}\right) + c \end{aligned}$$

(ιθ)

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x+2}}{x-7} dx. & \text{Θεωρούμε την αντικατάσταση } u = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow dx = 2u du \text{ και αρα} \\ \int \frac{\sqrt{x+2}}{x-7} dx &= 2 \int \frac{u^2}{u^2-9} du = 2 \int \frac{u^2-9+9}{u^2-9} du = 2 \int \frac{u^2-9}{u^2-9} du - 18 \int \frac{du}{(u-3)(u+3)} \\ 2u - \frac{18}{6} \int \left( \frac{1}{u-3} - \frac{1}{u+3} \right) du &= 2u + 3 \ln \left| \frac{u-3}{u+3} \right| + c = 2\sqrt{x+2} + 3 \ln \left| \frac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt{x+2}+3} \right| + c \end{aligned}$$

(κ)

$$\int \frac{1}{1+\eta\mu x} dx = \int \frac{1}{\frac{2\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right)}} dx = \int \frac{1+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right)+1+2\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{\tau\epsilon\mu^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\epsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)^2} dx = 2 \int \frac{1}{\left(\epsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)^2} d\left(\epsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)+1\right) = -\frac{2}{\epsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)+1} + c \\
 &= \epsilon\varphi x - \tau\epsilon\mu x + c
 \end{aligned}$$

Διαφορετικά

$$\int \frac{1}{1+\eta\mu x} dx = \int \frac{1-\eta\mu x}{1-\eta\mu^2 x} dx = \int \frac{1-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \int (\tau\epsilon\mu^2 x - \tau\epsilon\mu x \epsilon\varphi x) dx = \epsilon\varphi x - \tau\epsilon\mu x + c$$

(κα)

$$\int \frac{1}{3+2\sigma\upsilon\nu(2x)-\eta\mu(2x)} dx = - \int \frac{1}{\eta\mu(2x)-2\sigma\upsilon\nu(2x)-3} dx$$

Αφου  $\sigma\upsilon\nu(2x) = \frac{1-\epsilon\varphi^2 x}{1+\epsilon\varphi^2 x}$  και  $\eta\mu(2x) = \frac{2\epsilon\varphi x}{1+\epsilon\varphi^2 x}$ , το πιο πάνω γίνεται  $-\int \frac{1+\epsilon\varphi^2 x}{-3\epsilon\varphi^2 x+2\epsilon\varphi x-2} dx$   
 Και θεωρώντας την αντικατάσταση  $u = \epsilon\varphi^2 x \Leftrightarrow dx = \frac{2}{u^2+1} du$  και αρα το πιο πάνω γίνεται

$$= \int \frac{du}{(u-1)^2+4} = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(\frac{u-1}{2}\right)}{\left(\frac{u-1}{2}\right)^2+1} = \tau\omicron\xi\epsilon\varphi\left(\frac{u-1}{2}\right) + c = \tau\omicron\xi\epsilon\varphi\left(\frac{\epsilon\varphi x-1}{2}\right) + c$$

(κβ)

$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} dx$ . Θεωρούμε την αντικατάσταση  $x(\theta) = \epsilon\varphi\theta \Leftrightarrow dx = \tau\epsilon\mu^2(\theta)d\theta$  στο διάστημα  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$   
 και  $\epsilon\varphi\theta = x$ . Αφού  $1+\epsilon\varphi^2(\theta) = \tau\epsilon\mu^2(\theta) \Rightarrow \tau\epsilon\mu^2(\theta) = 1+x^2$  και αφού  $\sigma\upsilon\nu\theta > 0$  στο  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , είναι  
 $\tau\epsilon\mu(\theta) = \sqrt{1+x^2}$ , δηλ.  $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{\tau\epsilon\mu(\theta)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ . Συνεπώς, το πιο πάνω ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται στο

$$\int \frac{\tau\epsilon\mu^2(\theta)d\theta}{\epsilon\varphi^2(\theta)\sqrt{1+\epsilon\varphi^2(\theta)}} = \int \frac{\tau\epsilon\mu^2(\theta)d\theta}{\epsilon\varphi^2(\theta)\tau\epsilon\mu\theta} = \int \frac{\tau\epsilon\mu\theta}{\epsilon\varphi^2(\theta)} d\theta = \int \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu^2(\theta)} d\theta = \int \frac{(\eta\mu\theta)'}{\eta\mu^2(\theta)} d\theta$$

δηλ.  $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} dx = -\frac{1}{\eta\mu\theta} + c = -\sigma\tau\epsilon\mu\theta + c$

και για να επιστρέψουμε στην αρχική μας μεταβλητή  $x$ , είτε χρησιμοποιούμε τριγωνάκι είτε με τη  
 χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων:  $\epsilon\varphi\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \eta\mu\theta \Rightarrow \eta\mu\theta = x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .

Συνεπώς,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + c$$

(κγ)

$$\int \frac{1}{(x+3)\sqrt{x^2+3x}} dx = \int \frac{1}{(x+3)\sqrt{x(x+3)}} dx$$

Θεωρούμε την αντικατάσταση  $t = \frac{1}{x+3}, x \neq -3 \Leftrightarrow dt = -\frac{1}{(x+3)^2} dx \Leftrightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$

Επίσης,  $x = \frac{1}{t} - 3 = \frac{1-3t}{t}$  και το πιο πάνω γίνεται

$$\int \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{1-3t} \cdot \frac{1}{t}} dt = - \int \frac{1}{t\sqrt{1-3t}} dt = - \int \frac{1}{\sqrt{1-3t}} dt = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1-3t}} d(1-3t)^{\frac{2}{3}} \sqrt{1-3t} + c$$

και αρα

$$\int \frac{1}{(x+3)\sqrt{x^2+3x}} dx = \frac{2\sqrt{x^2+3x}}{3x+3} + c$$

**2.** [Οι  $f, g$  θεωρούνται δις παραγωγίσιμες] Έχουμε:

$$\begin{aligned} \int f''(x) \cdot g(x) dx &= \int (f'(x))' \cdot g(x) dx = f'(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g'(x) dx \\ &= f'(x) \cdot g(x) - \left( f(x) \cdot g'(x) - \int f(x) \cdot (g'(x))' dx \right) \\ &= f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x) + \int f(x) \cdot g''(x) dx \end{aligned}$$

Κατά μέρη

Εφαρμόζουμε το πιο πάνω για τις συναρτήσεις  $f$  και  $g$  με τύπους  $f(x) = e^x$  και  $g(x) = x^2$ :  
 $f'(x) = f''(x) = e^x$  και αρα

$$\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2xe^x + 2 \int e^x dx = e^x \cdot x^2 - 2xe^x + 2e^x + c = (x^2 - 2x + 2)e^x + c$$

**3.** (α) Έχουμε για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) &= \frac{\sqrt{x^2+1} \cdot (x)' - x \cdot (\sqrt{x^2+1})'}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \\ \text{Αυτό μας λέει ότι} \quad \int \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} dx &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + c \end{aligned}$$

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned} \int \frac{\text{τοξεφ}x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} dx &= \int \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \cdot \text{τοξεφ}x dx = \int \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right)' \cdot \text{τοξεφ}x dx \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \text{τοξεφ}x - \int (\text{τοξεφ}x)' \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \text{τοξεφ}x - \int \frac{1}{x^2+1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \text{τοξεφ}x - \int \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \text{τοξεφ}x - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \text{τοξεφ}x + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + c \end{aligned}$$

**4.** (α) Έχουμε

$$\int \frac{2\sigma\nu\nu x - \eta\mu x}{\sigma\nu\nu x + 2\eta\mu x} dx = \int \frac{(\sigma\nu\nu x + 2\eta\mu x)'}{\sigma\nu\nu x + 2\eta\mu x} dx = \ln|\sigma\nu\nu x + 2\eta\mu x| + c$$

$$\begin{aligned} (\beta) \sigma\nu\nu x &\equiv \alpha(\sigma\nu\nu x + 2\eta\mu x) + \beta(2\sigma\nu\nu x - \eta\mu x) \Leftrightarrow 1 \cdot \sigma\nu\nu x + 0 \cdot \eta\mu x \\ &\equiv (\alpha + 2\beta)\sigma\nu\nu x + \eta\mu x(2\alpha - \beta) \end{aligned}$$

και λύνοντας το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ 2\alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

ευρίσκουμε ότι  $\beta = \frac{2}{5}$  και  $\alpha = \frac{1}{5}$

(γ)

$$\int \frac{\sigma\nu\nu x}{\sigma\nu\nu x + 2\eta\mu x} dx$$

Από το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε ότι

$$\sigma\upsilon\nu x \equiv \frac{1}{5}(\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x) + \frac{2}{5}(2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)$$

η οποία μας δίνει  $5\sigma\upsilon\nu x \equiv (\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x) + 2(2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)$  και διαιρώντας με το  $(\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x)$  αμφότερα μέλη, έχουμε:

$$5 \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x} \equiv 1 + 2 \frac{2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x}$$

Έτσι,

$$5 \int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x} dx \equiv \int dx + 2 \int \frac{2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x} dx = \int dx + 2 \int \frac{2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x} dx$$

$$= x + 2 \ln|\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x| + c$$

δηλ.

$$\int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x} dx = \frac{x}{5} + \frac{2}{5} \ln|\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x| + c$$

5.

(α)  $\int \frac{7}{2x\sqrt{\ln(x)}} dx, x \in (0, +\infty)$ . Θεωρούμε την αντικατάσταση  $u(x) = \ln(x), x \in (0, +\infty) \Leftrightarrow du = \frac{dx}{x}$ . Τότε,

$$\int \frac{7}{2x\sqrt{\ln(x)}} dx = 7 \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = 7\sqrt{u} + c = 7\sqrt{\ln(x)} + c$$

(β)  $I = \int \frac{e^x}{(e^x + 1)\ln(e^x + 1)} dx = \int \frac{e^x}{e^x + 1} \cdot \frac{1}{\ln(e^x + 1)} dx, \quad x \in \mathbb{R}$

Θεωρούμε την αντικατάσταση  $u(x) = \ln(e^x + 1), x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow du = \frac{e^x}{e^x + 1} dx$ . Τότε,

$$I = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln(\ln(e^x + 1)) + c$$

(γ)  $\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2 - 2}} dx, \quad \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

Θεωρούμε την αντικατάσταση  $x(\theta) = \sqrt{2}\tau\epsilon\mu\theta, \theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow dx(\theta) = \sqrt{2}\tau\epsilon\mu\theta\epsilon\varphi\theta d\theta$ . Τότε

$$x^2(\theta) - 1 = 2\tau\epsilon\mu^2\theta - 2 = 2(\tau\epsilon\mu^2\theta - 1) = 2\epsilon\varphi^2\theta$$

Και αρα αφού  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \epsilon\varphi\theta > 0, \sqrt{\epsilon\varphi^2\theta} = \epsilon\varphi\theta$

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2 - 2}} dx = \int \frac{\sqrt{2}\tau\epsilon\mu\theta\epsilon\varphi\theta}{4\sqrt{2}\tau\epsilon\mu^4\theta\epsilon\varphi\theta} d\theta = \frac{1}{4} \int \frac{d\theta}{\tau\epsilon\mu^3\theta} = \frac{1}{4} \int \sigma\upsilon\nu^3\theta d\theta = \frac{1}{4} \int \sigma\upsilon\nu^3\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \left( \eta\mu\theta - \frac{1}{3}\eta\mu^3\theta \right) + c$$

Επιστρέφοντας τώρα στον αρχικό μετασχηματισμό μας,

$$x(\theta) = \sqrt{2}\tau\epsilon\mu\theta, \theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \theta = \tau\omicron\chi\tau\epsilon\mu \frac{x}{\sqrt{2}}$$

και αρα  $\eta\mu\theta = \eta\mu \left( \tau\omicron\chi\tau\epsilon\mu \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right) = \frac{2}{x} \sqrt{x^2 - 2}, x \in (0, 1)$

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2 - 2}} dx = \frac{1}{4} \frac{2}{x} \sqrt{x^2 - 2} - \frac{1}{x^3} (x^2 - 2)^{\frac{2}{3}} + c = \frac{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 - 2}}{6x^3} + c$$

(δ)  $\int \sqrt{\epsilon\varphi(\theta)} d\theta$ . Θεωρούμε την αντικατάσταση

$$u(\theta) = \sqrt{\epsilon\varphi(\theta)} \Leftrightarrow du(\theta) = \frac{\tau\epsilon\mu^2\theta}{2\sqrt{\epsilon\varphi(\theta)}} d\theta = \frac{1 + \epsilon\varphi^2\theta}{2\sqrt{\epsilon\varphi(\theta)}} d\theta = \frac{1 + u^4}{2u} \Leftrightarrow d\theta = \frac{2u}{1 + u^4} du$$

Τότε

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{\varepsilon\varphi(\theta)} d\theta &= \int u \frac{2u}{1+u^4} du = \int \frac{2u^2}{1+u^4} du = 2 \int \frac{u^2}{(u^2 - \sqrt{2}u + 1)(u^2 + \sqrt{2}u + 1)} du \\
 &= \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \int \left( \frac{u}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} - \frac{u}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} \right) du = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \int \left( \frac{u}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} - \frac{u}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} \right) du \\
 &= \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \ln(u^2 + \sqrt{2}u + 1) + \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}} \ln(u^2 - \sqrt{2}u + 1) + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctan}(\sqrt{2}u + 1) \\
 &\quad + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctan}(\sqrt{2}u - 1) + c \\
 &= \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \ln(\varepsilon\varphi^2(\theta) + \sqrt{2\varepsilon\varphi(\theta)} + 1) + \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}} \ln(u^2 - \sqrt{2\varepsilon\varphi(\theta)} + 1) + \\
 &\quad + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctan}(\sqrt{2\varepsilon\varphi(\theta)} + 1) + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctan}(\sqrt{2\varepsilon\varphi(\theta)} - 1) + c
 \end{aligned}$$

**6. (α)** Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \int x(\operatorname{arctan} x)^2 dx &= \int \left( \frac{x^2}{2} \right)' (\operatorname{arctan} x)^2 dx = \frac{x^2}{2} (\operatorname{arctan} x)^2 - \int \left( \frac{x^2}{2} \right)' (\operatorname{arctan} x)^2 dx \\
 &= \frac{x^2}{2} (\operatorname{arctan} x)^2 - \int \frac{x^2}{2} ((\operatorname{arctan} x)^2)' dx = \frac{x^2}{2} (\operatorname{arctan} x)^2 - \int \frac{x^2}{2} ((\operatorname{arctan} x)^2)' dx \\
 &= \frac{x^2}{2} (\operatorname{arctan} x)^2 - \int \frac{x^2 \operatorname{arctan} x}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} (\operatorname{arctan} x)^2 - \int \left( \operatorname{arctan} x - \frac{\operatorname{arctan} x}{1+x^2} \right) dx \\
 &= \frac{x^2}{2} (\operatorname{arctan} x)^2 - \int \operatorname{arctan} x dx - \int \frac{\operatorname{arctan} x}{1+x^2} dx \\
 &= \frac{x^2}{2} (\operatorname{arctan} x)^2 - x \operatorname{arctan} x + \frac{\ln(x^2 + 1)}{2} - \int \operatorname{arctan} x (\operatorname{arctan} x)' dx \\
 &= \frac{x^2}{2} (\operatorname{arctan} x)^2 - x \operatorname{arctan} x + \frac{\ln(x^2 + 1)}{2} - \frac{(\operatorname{arctan} x)^2}{2} + c \\
 &= \frac{x^2}{2} (\operatorname{arctan} x)^2 - x \operatorname{arctan} x + \frac{\ln(x^2 + 1)}{2} - \frac{(\operatorname{arctan} x)^2}{2} + c \\
 &= \frac{1}{2} (x^2 + 1) (\operatorname{arctan} x)^2 - x \operatorname{arctan} x + \frac{\ln(x^2 + 1)}{2} + c
 \end{aligned}$$

**(β)** Θεωρούμε την αντικατάσταση  $x + 1 = u$ :

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2}{(x+1)^3} dx &= \int \frac{(u-1)^2}{u^3} du = \int \frac{u^2 - 2u + 1}{u^3} du = \int \left( \frac{1}{u} - \frac{2}{u^2} + \frac{1}{u^3} \right) du = \ln|u| + \frac{2}{u} - \frac{1}{2u^2} + c \\
 &= \int \left( \frac{1}{u} - \frac{2}{u^2} + \frac{1}{u^3} \right) du = \ln|u| + \frac{2}{u} - \frac{1}{2u^2} + c = \ln(x+1) + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + c
 \end{aligned}$$

**(γ)** Χρησιμοποιούμε την (τριγωνομετρική) ταυτότητα  $\eta\mu x = \frac{2\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)}{\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right)+1}$ :

$$\int \frac{1}{(2 + \eta\mu x)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1}{\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right) + \varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + 1} dx (*)$$

Θεωρούμε την αντικατάσταση  $u = \varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow dx = \frac{2du}{\varepsilon\mu^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2}{u^2+1} du$  και αρα:

$$(*) = \int \frac{du}{u^2 + u + 1} = \int \frac{du}{\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \quad (**)$$

Θεωρούμε την αντικατάσταση  $w = \left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right) \Leftrightarrow dw = \frac{\sqrt{3}du}{2}$  και αρα:

$$(**) = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dw}{w^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{τοξεφ} w + c = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{τοξεφ} \left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right) + c = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{τοξεφ} \left(\frac{2\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + 1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

**7. (α)** Έχουμε:

$$I_f = \int e^x (f(x) + f'(x)) dx = \int e^x f(x) dx + \int e^x f'(x) dx$$

Είναι

$$\int e^x f(x) dx = \int (e^x)' f(x) dx = e^x f(x) - \int e^x f'(x) dx$$

και αρα  $I_f = e^x f(x) + c$ . Έτσι, αν  $f(x) = \eta\mu x$ , τότε  $\int e^x (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) dx = e^x \eta\mu x + c$

$$I_v = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^v} dx \quad (v \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0)$$

Για  $v = 1$ , έχουμε  $I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{τοξεφ} \left(\frac{x}{a}\right) + c$  ενώ για  $v > 1$ :

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \int (x)' \cdot \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} - \int x \cdot \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} - 2na^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1} \end{aligned}$$

και λύνοντας ως προς  $I_{n+1}$ :

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \left[ \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n - 1)I_n \right] \quad \text{ή} \quad I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2} \left[ \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + (2n - 3)I_{n-1} \right]$$

**(β)** Έχουμε

$$I_2 = \frac{1}{2(2-1)a^2} \left[ \frac{x}{(x^2 + a^2)^{2-1}} + (2 \cdot 2 - 3)I_{2-1} \right] = \frac{1}{2a^2} \left[ \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{a} \operatorname{τοξεφ} \left(\frac{x}{a}\right) \right] + c$$

και

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2(3-1)a^2} \left[ \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3-1}} + (2 \cdot 3 - 3)I_{3-1} \right] \\ &= \frac{1}{4a^2} \left[ \frac{5x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{2a^2} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{3}{2a^3} \left[ \operatorname{τοξεφ} \left(\frac{x}{a}\right) \right] \right] + c \end{aligned}$$

**8.**  $f(x) = -\frac{2}{x^3}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ . Η συνάρτηση  $F$  με τύπο

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x > 0 \\ \frac{1}{x^2}, & x < 0 \end{cases}$$

είναι μια παράγουσα της  $f$  αφού για  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  έχουμε  $F'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$ . Ομοίως και η συνάρτηση  $G$  με τύπο



$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} + 5, & x > 0 \\ \frac{1}{x^2} - 5, & x < 0 \end{cases}$$

είναι μια παράγουσα της  $f$  αφού για  $x \in (-\infty, 0)$  έχουμε  $G'(x) = \left(\frac{1}{x^2} - 5\right)' = -\frac{2}{x^3}$  και για  $x \in (0, +\infty)$  έχουμε  $G'(x) = \left(\frac{1}{x^2} + 5\right)' = -\frac{2}{x^3}$ . Σε κάθε περίπτωση,  $F' \equiv f$ ,  $G' \equiv f$ . Είναι λάθος να γράψουμε

$$\int \left(-\frac{2}{x^3}\right) dx = \frac{1}{x^2}, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \equiv \mathbb{R} - \{0\}$$

αφού το σύνολο  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  δεν είναι συνεκτικό.

**9.** Έχουμε:

$$I_f = \int e^x (f(x) + f'(x)) dx = \int e^x f(x) dx + \int e^x f'(x) dx$$

Είναι

$$\int e^x f(x) dx = \int (e^x)' f(x) dx = e^x f(x) - \int e^x f'(x) dx$$

και αρα  $I_f = e^x f(x) + c$ . Έτσι, αν  $f(x) = \eta\mu x$ , τότε  $\int e^x (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) dx = e^x \eta\mu x + c$

**10.** Θα βρούμε την  $f$  σε κάθε περίπτωση:

**(α)** Έχουμε

$$\begin{aligned} \begin{cases} f^2(x)f'(x) = x^2 + 1 \\ f(0) = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{f^3(x)}{3}\right)' = x^2 + 1 \\ f(0) = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \int \left(\frac{f^3(x)}{3}\right)' dx = \int (x^2 + 1) dx \\ f(0) = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{f^3(x)}{3} = \frac{x^3}{3} + x + c \\ f(0) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Είναι  $f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$  και αρα

$$\frac{f^3(x)}{3} = \frac{x^3}{3} + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Για  $x > 0$ , η πιο πάνω δίνει

$$f^3(x) = x^3 + 3x, \quad \forall x > 0$$

και αφού  $f(0) = 0$ , έπεται ότι

$$f^3(x) = x^3 + 3x, \quad \forall x \geq 0$$

**(β)** Έχουμε

$$\begin{aligned} \begin{cases} xf'(x) = e^x - f(x) \\ f(2) = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} xf'(x) + f(x) = e^x \\ f(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int (xf'(x) + f(x))' dx = \int e^x dx \\ f(2) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int (xf(x))' dx = e^x \\ f(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xf(x) = e^x + c \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

Είναι  $f(2) = 0 \Rightarrow c = -e^2$  και αρα  $xf(x) = e^x - e^2, \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ , δηλ.

$$f(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{e^2}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

(γ) Έχουμε

$$\begin{cases} 2xf'(x) + x^2f''(x) = 2x + 1 \\ f'(1) = f(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int (x^2f'(x))' dx = \int (2x + 1) dx \\ f'(1) = f(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2f'(x) = x^2 + x + c_1 \\ f'(1) = f(1) = 2 \end{cases}$$

Αλλά,  $f'(1) = 2$  και αρα  $c_1 = 0$ . Το ΠΑΤ μας γίνεται λοιπόν

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2f'(x) = x^2 + x \\ f(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int f'(x) dx = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx \\ f(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = x + \ln|x| + c \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

Αλλά,  $f(1) = 2$  και αρα  $1 = c$  και έτσι

$$f(x) = x + \ln|x| + 1$$

**11.** Έχουμε

$$f''(x) = \frac{2}{(x-3)^3}, \quad x \neq 3$$

Η συνάρτηση  $F$  με τύπο

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x-3)^2} + C_1, & x > 3 \\ -\frac{1}{(x-3)^2} + C_2, & x < 3 \end{cases}$$

είναι μια παράγουσα της  $f''$ . Από υπόθεση,  $f'(4) = 0$  και αρα  $C_1 = 1$ . Έτσι,

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x-3)^2} + 1, & x > 3 \\ -\frac{1}{(x-3)^2} + C_2, & x < 3 \end{cases}$$

Η συνάρτηση  $F$  με τύπο

$$F(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x-3} + c, & x > 3 \\ C_2x + \frac{1}{x-3}, & x < 3 \end{cases}$$

είναι μια παράγουσα της  $f'$ . Έτσι, χρησιμοποιώντας και το ότι  $f(4) = 4$ , βρίσκουμε  $c = -1$  και αρα

$$F(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x-3} - 1, & x > 3 \\ Cx + \frac{1}{x-3}, & x < 3 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 4}{x-3}, & x > 3 \\ Cx + \frac{1}{x-3}, & x < 3 \end{cases} = \begin{cases} \frac{(x-2)^2}{x-3}, & x > 3 \\ Cx + \frac{1}{x-3}, & x < 3 \end{cases}$$

Μια τέτοια συνάρτηση είναι και η

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x-3}, \quad x \neq 3$$

**12.** Έχουμε

$$\begin{cases} f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ f'(0) = 3, f(0) = 2 \end{cases}$$

**(α)** Είναι  $\forall x \in \mathbb{R} \ u(x) = f'(x) - f(x) \Rightarrow u'(x) = f''(x) - f'(x)$  και αρα

$$u'(x) - 2u(x) = f''(x) - f'(x) - 2f'(x) + 2f(x) = f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

από υπόθεση.

**(β)** Είναι  $u(0) = f'(0) - f(0) = 3 - 2 = 1$ . Τώρα, θεωρούμε τη συνάρτηση  $h$  με τύπο  $h(x) = e^{-2x}u(x)$ . Είναι

$$h'(x) = (e^{-2x}u(x))' \Rightarrow h'(x) = -2e^{-2x}u(x) + e^{-2x}u'(x) = e^{-2x} \underbrace{(u'(x) - 2u(x))}_{=0} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

και αρα, από γνωστό μας Πόρισμα, είναι  $h(x) = c$  για κάποια πραγματική σταθερά  $c$ , δηλ.  $e^{-2x}u(x) = c$ , δηλ.  $u(x) = ce^{2x}, \forall x \in \mathbb{R}$ . Αλλά,  $u(0) = 1$  και αρα  $c = 1$ . Συνεπώς,

$$u(x) = e^{2x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**(γ)** Είναι  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$(e^{-x}f(x))' = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) = u(x)e^{-x} = e^{2x} \cdot e^{-x} = e^x$$

Τώρα,

$$(e^{-x}f(x))' = e^x \Rightarrow \int (e^{-x}f(x))' dx = \int e^x dx \Rightarrow e^{-x}f(x) = e^x + c \Rightarrow f(x) = e^{2x} + ce^x$$

Αλλά,  $f(0) = 2$  και αρα  $c + 1 = 2$ , δηλ.  $c = 1$ . Έτσι,

$$f(x) = e^{2x} + e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$