

Δραστηριότητες σελ. 54 (Ενότητα 3.6.7: Ολοκληρώματα αναγωγικού τύπου)

1. (α) $I_v = \int x^v \cdot e^x dx$, όπου $v \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Έχουμε,

$$I_0 = \int e^x dx = e^x + c \text{ και για } v \geq 1 \text{ σταθεροποιημένο}$$

$$\begin{aligned} I_v = \int x^v \cdot e^x dx &= \int x^v \cdot (e^x)' dx = x^v \cdot e^x - \int e^x \cdot (x^v)' dx \\ &= x^v \cdot e^x - v \int e^x \cdot x^{v-1} dx = x^v \cdot e^x - v I_{v-1} \end{aligned}$$

(β) $I_v = \frac{1}{2} x^2 (\ln x)^v - \frac{v}{2} I_{v-1}$, όπου $I_v = \int x^2 \cdot (\ln x)^v dx$ ($v \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). Έχουμε,

$$I_0 = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c \text{ και για } v \geq 1 \text{ σταθεροποιημένο}$$

$$\begin{aligned} I_v = \int x \cdot (\ln x)^v dx &= \int (\ln x)^v \cdot \left(\frac{1}{2} x^2 \right)' dx = \frac{1}{2} x^2 (\ln x)^v - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot ((\ln x)^v)' dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 (\ln x)^v - \frac{v}{2} \int x \cdot (\ln x)^{v-1} dx = \frac{1}{2} x^2 (\ln x)^v - \frac{v}{2} I_{v-1} \end{aligned}$$

(γ) $I_v = \int \varepsilon \varphi^v(x) dx$. ($v \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). Έχουμε, $I_0 = x + c$ και

$$I_1 = \int \varepsilon \varphi(x) dx = \int \frac{\eta \mu(x)}{\sigma \nu \nu(x)} dx = - \int \frac{(\sigma \nu \nu(x))'}{\sigma \nu \nu(x)} dx = - \ln |\sigma \nu \nu(x)| + c = \ln |\tau \varepsilon \mu(x)| + c$$

και για $v \geq 2$ σταθεροποιημένο

$$\begin{aligned} I_v = \int \varepsilon \varphi^v(x) dx &= \int \varepsilon \varphi^{v-2}(x) \cdot \varepsilon \varphi^2(x) dx = \int \varepsilon \varphi^{v-2}(x) \cdot (\tau \varepsilon \mu^2(x) - 1) dx \\ &= \int \varepsilon \varphi^{v-2}(x) \cdot \tau \varepsilon \mu^2(x) dx - \int \varepsilon \varphi^{v-2}(x) dx \\ &= \int \varepsilon \varphi^{v-2}(x) \cdot (\varepsilon \varphi(x))' dx - \int \varepsilon \varphi^{v-2}(x) dx = \frac{\varepsilon \varphi^{v-1}(x)}{v-1} - I_{v-2} \end{aligned}$$

2. $I_v = \int x^v \cdot \eta \mu(2x) dx$, όπου $v \in \mathbb{N}, v \geq 2$.

Είναι δε

$$\begin{aligned} I_0 &= \int x^0 \cdot \eta \mu(2x) dx = \int \eta \mu(2x) dx = -\frac{\sigma \nu \nu(2x)}{2} + c \\ I_1 &= \int x^1 \cdot \eta \mu(2x) dx = \int x \eta \mu(2x) dx = \frac{\eta \mu(2x)}{2} - \frac{\sigma \nu \nu(2x)}{2} + c \end{aligned}$$

(με κατά μέρη ολοκλήρωση)

Έχουμε, για $v \geq 2$ σταθεροποιημένο

$$\begin{aligned} I_v = \int x^v \cdot \eta \mu(2x) dx &= \int x^v \cdot \left(-\frac{1}{2} \sigma \nu \nu(2x) \right)' dx \\ &= -x^v \cdot \frac{1}{2} \sigma \nu \nu(2x) + \frac{v}{2} \int \sigma \nu \nu(2x) \cdot x^{v-1} dx \\ &= -\frac{1}{2} x^v \sigma \nu \nu(2x) + \frac{v}{2} \int \left(\frac{1}{2} \eta \mu(2x) \right)' \cdot x^{v-1} dx \\ &= -\frac{1}{2} x^v \sigma \nu \nu(2x) + \frac{v}{2} \left(\frac{1}{2} \eta \mu(2x) \cdot x^{v-1} - \frac{v-1}{2} \int x^{v-2} \cdot \eta \mu(2x) dx \right) \\ &= -\frac{1}{2} x^v \sigma \nu \nu(2x) + \frac{v}{4} \eta \mu(2x) \cdot x^{v-1} - \frac{v(v-1)}{4} I_{v-2} \end{aligned}$$

Τέλος,

$$\int x^4 \cdot \eta \mu(2x) dx = I_4 = -\frac{1}{2} x^4 \sigma \nu \nu(2x) + \frac{4}{4} \eta \mu(2x) \cdot x^{4-1} - \frac{4(4-1)}{4} I_{4-2}$$

$$= -\frac{1}{2}x^4 \sigma\upsilon\nu(2x) + \eta\mu(2x) \cdot x^3 - 3I_2$$

και αφού

$$I_2 = -\frac{1}{2}x^2 \sigma\upsilon\nu(2x) + \frac{2}{4}\eta\mu(2x) \cdot x^{2-1} - \frac{2(2-1)}{4}I_{2-2} = -\frac{1}{2}x^2 \sigma\upsilon\nu(2x) + \frac{1}{2}\eta\mu(2x) \cdot x - \frac{1}{2}I_0$$

έπεται τελικά ότι

$$\int x^4 \cdot \eta\mu(2x) dx = \frac{x(2x^2 - 3)\eta\mu(2x)}{2} - \frac{(2x^4 - 6x^2 + 3)\sigma\upsilon\nu(2x)}{4} + c$$