

Δραστηριότητες σελ. 45 (Ενότητα 3.6.5: Τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις)

- 1. (α)** Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$. Θεωρούμε την αντικατάσταση $x = 4\eta\mu\theta, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow dx = 4\sigma\eta\theta d\theta$.

$$\text{Τότε, } \sigma\eta\theta = 1 - \eta\mu^2\theta \Rightarrow \sigma\eta\theta = \sqrt{1 - \eta\mu^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{16}\right)^2} = \sqrt{16 - x^2}$$

$$\text{Έτσι, } \int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \int \frac{\sigma\eta\theta d\theta}{\sigma\eta\theta} = \int d\theta = \theta + c = \text{τοξ}\eta\mu\left(\frac{x}{4}\right) + c$$

- (β)** $\int \sqrt{4+x^2} dx$. Θεωρούμε την αντικατάσταση $x(\theta) = 2\varepsilon\varphi\theta \Rightarrow dx = 2\tau\epsilon\mu^2(\theta)d\theta$ στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ και $\varepsilon\varphi\theta = \frac{x}{2}$. Αφού

$$1 + \varepsilon\varphi^2(\theta) = \tau\epsilon\mu^2(\theta) \Rightarrow \tau\epsilon\mu^2(\theta) = 1 + \frac{x^2}{4}$$

και αφού $\sigma\eta\theta > 0$ στο $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, είναι $\tau\epsilon\mu(\theta) = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4+x^2}$, δηλ. $\sigma\eta\theta = \frac{1}{\tau\epsilon\mu(\theta)} = \frac{2}{\sqrt{4+x^2}}$. Συνεπώς, το πιο πάνω ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται στο

$$2 \int \sqrt{4+4\varepsilon\varphi^2(\theta)} \tau\epsilon\mu^2(\theta)d\theta = 4 \int \tau\epsilon\mu^3(\theta)d\theta = \ln|\varepsilon\varphi x + \tau\epsilon\mu x| + \varepsilon\varphi x + \tau\epsilon\mu x + c$$

και για να επιστρέψουμε στην αρχική μας μεταβλητή x , είτε χρησιμοποιούμε το τριγωνάκι είτε με τη χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων:

$$\varepsilon\varphi\theta \cdot \sigma\eta\theta = \eta\mu\theta \Rightarrow \eta\mu\theta = \frac{x}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$$

Συνεπώς,

$$\int \sqrt{4+x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{4+x^2} + 2 \ln \left| \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4+x^2} \right| + c$$

- (γ)** $\int \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}} dx$.

Θεωρούμε την αντικατάσταση $x(\theta) = \sqrt{\frac{1}{3}}\sigma\eta\theta \Rightarrow dx = -\frac{\sqrt{3}}{3}\eta\mu\theta d\theta$ στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

και προχωρώντας ομοίως με πιο πάνω ευρίσκουμε τελικά ότι

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}} dx = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{τοξ}\eta\mu(\sqrt{3}x) + c$$

- (δ)** $\int \frac{1}{(x^2+4)^3} dx = \int \frac{1}{(x^2+2^2)^3} dx$. Εκ του αναγωγικού τύπου

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2} \left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1} \right]$$

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ όπου $a \neq 0$ ευρίσκουμε:

$$\int \frac{1}{(x^2+4)^3} dx = \frac{1}{16} \left(\frac{3}{8} \frac{x}{x^2+4} + \frac{x}{(x^2+4)^2} + \frac{3}{16} \text{τοξ}\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) \right) + c$$

- (ε)** $\int \frac{1}{x(1+x^2)} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c = \ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}\right) + c$

Διαφορετικά, με την αντικατάσταση $x = \varepsilon\varphi\theta, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int \frac{\tau\epsilon\mu^2\theta}{\varepsilon\varphi\theta\tau\epsilon\mu^2\theta} d\theta = \int \sigma\varphi\theta d\theta = \int \frac{\sigma\eta\theta}{\eta\mu\theta} d\theta = \int \frac{(\eta\mu\theta)'}{\eta\mu\theta} d\theta = \ln|\eta\mu\theta| + c$$

Αλλά, αφού $x = \varepsilon\varphi\theta$, έχουμε ότι $\eta\mu\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ και αρα

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)} dx = \ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}\right) + c$$

2. (α) Έχουμε

$\int \sqrt{3-2x-x^2} dx = \int \sqrt{4-(x+1)^2} dx = \int \sqrt{4-(x+1)^2} d(x+1) = \int \sqrt{4-x^2} dx$
 Θεωρούμε την αντικατάσταση $x(\theta) = 2\eta\mu\theta \Rightarrow dx = 2\sigma\eta\nu\theta d\theta$ στο διάστημα $(0, \pi)$ και προχωρώντας ομοίως με πιο πάνω ευρίσκουμε τελικά ότι

$$\int \sqrt{3-2x-x^2} dx = \frac{(x+1)\sqrt{3-2x-x^2}}{2} + 2\tau\omicron\xi\eta\mu\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

(β) Έχουμε

$\int \sqrt{2x^2+12x+8} dx = \sqrt{2} \int \sqrt{13-(x+3)^2} dx = \sqrt{2} \int \sqrt{13-x^2} dx$
 Θεωρούμε την αντικατάσταση $x(\theta) = \sqrt{13}\eta\mu\theta \Rightarrow dx = \sqrt{13}\sigma\eta\nu\theta d\theta$ στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$ και προχωρώντας ομοίως με πιο πάνω ευρίσκουμε τελικά ότι

$$\int \sqrt{2x^2+12x+8} dx = \frac{\sqrt{2}(x+3)\sqrt{x^2+6x+4}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2} \ln|\sqrt{x^2+6x+4}+x+3| + c$$

(γ) Έχουμε

$\int \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{2-(x-1)^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} dx$
 Θεωρούμε την αντικατάσταση $x(\theta) = \sqrt{2}\eta\mu\theta \Rightarrow dx = \sqrt{2}\sigma\eta\nu\theta d\theta$ στο διάστημα $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ και προχωρώντας ομοίως με πιο πάνω ευρίσκουμε τελικά ότι

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx = \tau\omicron\xi\eta\mu\left(\sqrt{2}\frac{x-1}{2}\right) + c$$

(δ) Θεωρούμε την αντικατάσταση

$x = \eta\mu^2\theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow dx = 2\eta\mu\theta\sigma\eta\nu\theta d\theta = \eta\mu(2\theta)d\theta$ και $\eta\mu\theta, \sigma\eta\nu\theta > 0$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx &= \int \sqrt{\frac{\eta\mu^2\theta}{1-\eta\mu^2\theta}} \eta\mu(2\theta)d\theta = 2 \int \sqrt{\frac{\eta\mu^2\theta}{1-\eta\mu^2\theta}} \eta\mu\theta\sigma\eta\nu\theta d\theta = 2 \int \sqrt{\frac{\eta\mu^2\theta}{\sigma\eta\nu^2\theta}} \eta\mu\theta\sigma\eta\nu\theta d\theta \\ &= 2 \int \varepsilon\varphi\theta \eta\mu\theta\sigma\eta\nu\theta d\theta = 2 \int \eta\mu^2\theta d\theta = 2 \cdot \frac{1}{2} (x - \eta\mu\theta \cdot \sigma\eta\nu\theta) + c = \theta - \eta\mu\theta \cdot \sigma\eta\nu\theta + c \end{aligned}$$

$$= \tau\omicron\xi\eta\mu(\sqrt{x}) - \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x} + c = \tau\omicron\xi\eta\mu(\sqrt{x}) - \sqrt{x \cdot (1-x)} + c$$

(ε) Θεωρούμε την αντικατάσταση $x = \tau\epsilon\mu\theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < x < 1, \theta = \tau\omicron\xi\sigma\eta\nu\frac{1}{x}, dx = \tau\epsilon\mu\theta \cdot \varepsilon\varphi\theta d\theta, \varepsilon\varphi\theta > 0$. Συνεπώς,

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} dx = \int \frac{\sqrt{\tau\epsilon\mu^2\theta-1}}{\tau\epsilon\mu^2\theta} \tau\epsilon\mu\theta \cdot \varepsilon\varphi\theta d\theta = \int \frac{\sqrt{\tau\epsilon\mu^2\theta-1}}{\tau\epsilon\mu^2\theta} \tau\epsilon\mu\theta \cdot \varepsilon\varphi\theta d\theta$$

$$= \int \frac{\varepsilon\varphi\theta}{\tau\epsilon\mu\theta} \cdot \varepsilon\varphi\theta d\theta = \int \frac{\varepsilon\varphi^2\theta}{\tau\epsilon\mu\theta} d\theta = \int \frac{\tau\epsilon\mu^2\theta-1}{\tau\epsilon\mu\theta} d\theta$$

$$= \int (\tau\epsilon\mu\theta - \sigma\eta\nu\theta) d\theta = \ln|\tau\epsilon\mu\theta + \varepsilon\varphi\theta| - \eta\mu\theta + c$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + c$$

Αφού: $\varepsilon\varphi\theta = \sqrt{\tau\epsilon\mu^2\theta-1} = \sqrt{x^2-1}$ και $\frac{1}{x} = \sigma\eta\nu\theta \Rightarrow \sigma\eta\nu^2\theta = \frac{1}{x^2} \Rightarrow 1 - \eta\mu^2\theta = \frac{1}{x^2}$

$$\Rightarrow \eta\mu\theta = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$