

Δραστηριότητες σελ. 60 (Εμπλουτισμού)

1. Είναι

$$f(x) = |3x - 6| = 3|x - 2| = \begin{cases} 3(x - 2), & x \geq 2 \\ 3(2 - x), & x < 2 \end{cases}$$

Κατ'αρχάς, λόγω της συνέχεις της συνάρτησης στο $\mathbb{R}$, αυτή θα έχει παράγουσα. Για $x \geq 2$ είναι

$$f(x) = 3(x - 2) \Rightarrow \int f(x) dx = 3 \int (x - 2) dx = 3x \left(\frac{x}{2} - 2 \right) + c$$

ενώ για $x < 2$ είναι

$$f(x) = 3(2 - x) \Rightarrow \int f(x) dx = 3 \int (2 - x) dx = 3x \left(2 - \frac{x}{2} \right) + c$$

και αρα μια παράγουσά της είναι (π.χ.) η

$$f(x) = \begin{cases} 3x \left(\frac{x}{2} - 2 \right) - 1, & x \geq 2 \\ 3x \left(2 - \frac{x}{2} \right) + 1, & x < 2 \end{cases}$$

2. $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'(1) = 3$, $f(1) = 3$ Για $x > 0$ είναι

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \int f''(x) dx = \int \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{1}{x} + c_1$$

και αφού $f'(1) = 3$, αντικαθιστώντας, έχουμε ότι $c_1 = 2$, δηλ. $f'(x) = \frac{1}{x} + 2$. Τώρα,

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2 \Rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(\frac{1}{x} + 2 \right) dx = \ln x + 2x + c_2$$

και αφού $f(1) = 3$, αντικαθιστώντας, έχουμε ότι $c_2 = 1$, δηλ. $f(x) = \ln x + 2x + 1$, $x > 0$.3. Δεν ισχύει ότι κάθε συνάρτηση $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει μια παράγουσα F , τότε είναι και συνεχής. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 2x \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Για $x \neq 0$ η συνάρτηση είναι συνεχής και

$$\int f(x) dx = \int \left(2x \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx = \int \left(x^2 \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \right)' dx = x^2 \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) + c$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση F με τύπο $F(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Ελέγχουμε αν υπάρχει η παράγωγοςστο $x = 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(0+h) - F(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

(π.χ. με εφαρμογή του Κριτηρίου Παρεμβολής) και αρα υπάρχει η $F'(0)$ και $= 0$. Έτσι, η (συνεχής) επέκταση g της F , δηλ. η συνάρτηση με τύπο

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

είναι παντού παραγωγίσιμη και μάλιστα $g'(x) = f(x)$. Αλλά, η f δεν είναι συνεχής στο $x = 0$ (δες θεωρία)Έτσι, βρήκαμε δυο ακολουθίες πραγματικών αριθμών που συγκλίνουν στο 0 αλλά οι εικόνες τους μέσω της f συγκλίνουν σε διαφορετικούς αριθμούς. Συνεπώς, η f' δεν είναι συνεχής στο $x = 0$ άρα ούτε και παραγωγίσιμη εκεί.