Προτεινόμενη λύση Άσκησης 8 (διορίσιμοι 2017)
8.1 (δες [ΘωΠ] Πρόβλημα 20/σελ 169, [ΕΓε] Σύνθετο Πρόβλημα 3/σελ 109)

▶ **Απάντηση**
Για να κάνουμε μια εικασία του με τί ισούται το εν λόγω άθροισμα, θεωρούμε την ειδική περίπτωση που το σημείο Μ ανήκει στη βάση ΒΓ του τριγώνου δηλ. η απόστασή του από τη βάση αυτή είναι ίση με 0. Αν το Μ συμπίπτει είτε με το Β είτε με το Γ, τότε έχουμε μία μόνο απόσταση, το **ύψος** του σημείου από την κορυφή Β και Γ αντίστοιχα.
Εικάζουμε λοιπόν ότι, στην περίπτωση αυτή, το άθροισμα των αποστάσεων του τυχαίου σημείου Μ της βάσης ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ ισούται με το ύψος του τριγώνου. Η γενική περίπτωση θα αποδειχτεί τότε εύκολα αφού θα 'μεταφέρουμε' το πρόβλημα προς τα πάνω (θεωρώντας παράλληλη μετατόπιση της πλευράς ΒΓ).

Κατασκευή: Έστω Μ τυχαίο σημείο τηε ΒΓ. Φέρουμε τις προβολές Κ και Λ του Μ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. 'Μεταφέρουμε' τα τμήματα ΜΚ και ΜΛ (στροφή και προβολή/μετατόπιση αντίστοιχα) στο ύψος ΒΗ του τριγώνου ΑΒΓ. Φέρουμε την προβολή Θ του Μ στο ΒΗ.

Απόδειξη: Το τετράπλευρο ΜΘΗΛ είναι ορθογώνιο (τρείς γωνίες ορθές) και αρα (ΜΛ)=(ΘΗ). Επίσης, $\Theta\widehat{M}\mathrm{B}=\mathrm{K}\widehat{B}\mathrm{M}=\widehat{\Gamma}=60°$. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΜΒΚ και ΒΜΘ:

$$\begin{cases} (\mathrm{BM}) = (\mathrm{BM}) \text{ (κοινή (υποτείνουσα))} \\ \widehat{M} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} \\ \widehat{K} = \widehat{\Theta} = 90° \end{cases} \Rightarrow \triangle MBK = \triangle BM\Theta$$

$\Rightarrow (BK) = (\Theta M)$ και $(KM) = (B\Theta)$. Άρα,

$$\begin{cases} (KM) = (B\Theta) \\ (M\Lambda) = (\Theta H) \end{cases} \Rightarrow (MK) + (M\Lambda) = (B\Theta) + (\Theta H) = (BH).$$

Το ύψος ΒΗ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του Μ.

Έστω τώρα Μ τυχόν σημείο στο εσωτερικό (αλλά όχι στο σύνορο) του **ισόπλευρου** τριγώνου ΑΒΓ. Από το Μ φέρουμε παράλληλη της ΒΓ και έστω Η και Θ τα σημεία τομής της με τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Φέρουμε το ύψος ΑΔ στο τρίγωνο ΑΒΓ. Το τρίγωνο ΑΗΘ είναι **ισόπλευρο**. Πράγματι, $\widehat{A} = \widehat{H} = \widehat{\Theta}$, αφού ΗΘ∥ΒΓ και το △ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.
Από το Μ φέρουμε τις προβολές Κ,Λ και Ξ στις πλευρές ΑΒ,ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.
Τότε, από την προηγούμενη περίπτωση, στο τρίγωνο ΑΗΘ, έχουμε ότι

$$(MK) + (M\Lambda) = (AN), \tag{1}$$

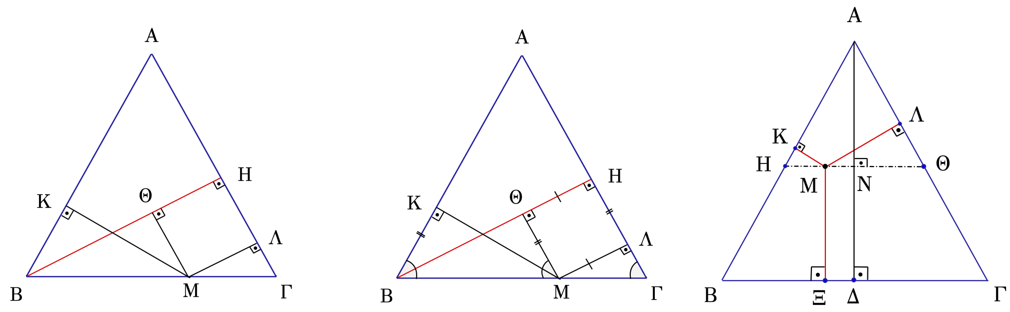
όπου ΑΛ το ύψος του τριγώνου ΑΗΘ. Τώρα, αφού ΜΞ∥ΝΔ και ΜΞ,ΝΔ⊥ΒΓ, έπεται ότι

$$(M\Xi) = (N\Delta). \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) έχουμε

$$(MK) + (M\Lambda) + (M\Xi) = (AN) + (N\Delta) = (A\Delta) = \text{σταθερό}.$$

◀



▶ **Παρατήρηση**

(i) Η απόδειξη που κάναμε για την ειδική περίπτωση δουλεύει και στην περίπτωση που το τρίγωνο ΑΒΓ είναι **ισοσκελές** (δες Πρόβλημα 1.20/σελ. 16 στο [AWe]).

(ii) Με τη βοήθεια της **Τριγωνομετρίας** και των ιδιοτήτων των αναλογιών, μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το πιο πάνω πρόβλημα αποφεύγοντας τα επιχειρήματα σύγκρισης τριγώνων κτλ:

$$\widehat{H} = \widehat{\Theta}(=30^\circ) \Rightarrow \sin\widehat{H} = \sin\widehat{\Theta}.$$

Αλλά,

$$\sin\widehat{H} = \frac{(AN)}{(AH)} = \frac{(KM)}{(HM)}, \qquad \sin\widehat{\Theta} = \frac{(M\Lambda)}{(M\Theta)}.$$

Άρα,

$$\frac{(KM)}{(HM)} = \frac{(M\Lambda)}{(M\Theta)} = \frac{(KM)+(M\Lambda)}{(HM)+(M\Theta)} = \frac{(KM)+(M\Lambda)}{(H\Theta)} = \frac{(KM)+(M\Lambda)}{(AH)}.$$

Έτσι

$$\frac{(AN)}{(AH)} = \frac{(KM)+(M\Lambda)}{(AH)} \Rightarrow (AN) = (KM)+(M\Lambda)$$

και αφού $(M\Xi) = (N\Delta)$,

$$(MK)+(M\Lambda)+(M\Xi) = (AN)+(N\Delta) = (A\Delta) = \text{σταθερό}.$$

Βιβλιογραφία-Αναφορές

[ΕΓε] Υπουργείο παιδείας, έρευνας και Θρησκευμάτων-Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής πολιτικής, *Ευκλείδεια Γεωμετρία*, Τεύχος Α′, Α′ Γενικού Λυκείου, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος»

[ΘωΠ] Γιάννη Θωμαΐδη, Ανδρέα Πούλου, *Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας*, Ανατύπωση διορθωμένη (2006), εκδόσεις ΖΗΤΗ, Θεσσαλονίκη

[AWe] M. N. Aref, William Wernick, *Problems and Solutions in Euclidean Geometry*, 1968, Dover Publications Inc., Mineola, New York, United States