Προτεινόμενη λύση ερώτησης 7 (διορίσιμοι 2019).

Κατασκευή: Έστω ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ οι διάμεσοι του τριγώνου ΑΒΓ και Θ το βαρύκεντρό του. Έστω ευθεία (ϵ) η οποία περ΄να από το Θ. Από το μέσον Ο του ΑΘ, φέρουμε την προβολή Ν στην (ϵ), από το μέσον Δ του ΒΓ την προβολή Σ και από το Β και Λ τις προβολές Γ και Ξ αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι (ΑΡ)=(ΛΒ)+(ΞΓ).

Απόδειξη: Το τετράπλευρο ΛΞΓΒ είναι τραπέζιο (ΒΛ,ΓΞ$\perp$ (ϵ) και Δ το μέσον του ΒΓ) $\Rightarrow$(Θ. Θαλή) Σ μέσον του ΛΞ και

$$(\Delta\Sigma) = \frac{1}{2}[(\Lambda B) + (\Xi\Gamma)]. \tag{1}$$

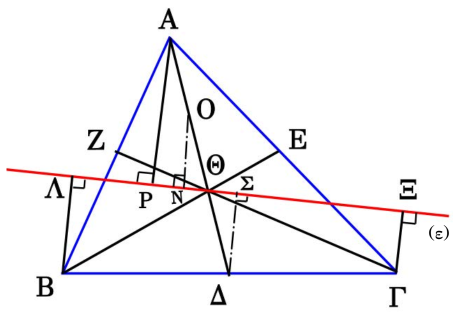
Θ βαρύκεντρο του $\triangle$ΑΒΓ$\Rightarrow$(ΑΟ)=(ΟΘ)=(ΘΔ)=$\frac{1}{3}$(ΑΔ).
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΝΘ και ΔΣΘ:

$$\begin{cases} (\mathrm{O}\Theta) = (\Theta\Delta) \\ \widehat{N} = \widehat{\Sigma} = 90^\circ \\ O\widehat{\Theta}N = \Delta\widehat{\Theta}\Sigma \end{cases} \quad \Rightarrow \triangle ON\Theta = \triangle\Delta\Sigma\Theta \;\Rightarrow\; (\mathrm{ON}) = (\Sigma\Delta).$$

Στο τρίγωνο $\triangle$ΑΡΘ:

$$\begin{cases} ON \parallel AB \\ O \text{ μέσον του } \mathrm{A}\Theta \end{cases} \quad \Rightarrow (ON) \parallel= \frac{(AP)}{2}.$$

$$\Rightarrow (AP) = 2(ON) = 2(\Delta\Sigma) \overset{(1)}{=} (\Lambda B) + (\Xi\Gamma).$$



Σημείωση: Είναι το πρόβλημα 1.29/σελ 22 στο

M. N. Aref, William Wernick, *Problems and Solutions in Euclidean Geometry*, 1968, Dover Publications Inc., Mineola, New York, United States

Υπενθύμιση: αν ΑΒΓ τρίγωνο, ΑΔ διάμεσος και Θ το βαρύκεντρο του τριγώνου, τότε

$$(\mathrm{A}\Theta) = \frac{2}{3}(\mathrm{A}\Delta) \quad \text{και} \quad (\Theta\Delta) = \frac{1}{2}(\mathrm{A}\Theta) = \frac{1}{3}(\mathrm{A}\Delta).$$