

Προτεινόμενη λύση Άσκησης 7 (διορίσιμοι 2017)

7.1

Ορισμός 0.0.1. Λέμε ότι η ακολουθία $(a_n)_n$ (πραγματικών αριθμών) **συγκλίνει στον (πραγματικό) αριθμό a αν**

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \equiv n_0(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon, \forall n \geq n_0.$$

7.2 Έστω $\epsilon > 0$. Θα βρούμε $n_0 \equiv n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\forall n \geq n_0$, να είναι $\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \epsilon$. Αυτό συμβαίνει $\Leftrightarrow \frac{1}{n} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών αριθμών¹, υπάρχει τέτοιος φυσικός αριθμός n_0 , για παράδειγμα ο $n_0 := \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$, όπου $[x]$ δηλώνει το ακέραιο μέρος του πραγματικού αριθμού x . Για το n_0 αυτό, επαληθεύεται ο ορισμός του ορίου:

$$\forall n \geq n_0 = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1 \Rightarrow n > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < \epsilon.$$

7.3 Σημείωση: Η συγκεκριμένη ακολουθία δίνεται συνήθως ως αντιπαράδειγμα του ότι

‘φραγμένη ακολουθία $\not\Rightarrow$ συγκλίνει’.

Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ άρτιος} \\ -1, & n \text{ περιττός} \end{cases}.$$

Απόδειξη 1 (με χρήση του ορισμού του ορίου²)

Υποθέτουμε ότι η $(a_n)_n$ συγκλίνει, έστω στον αριθμό a . Τότε, για τον $\epsilon = 1 > 0$ θα υπάρχει $n_0 \equiv n_0(1)$ τέτοιος ώστε $|a_n - a| < 1, \forall n \geq n_0$, δηλ. θα υπάρχει $n_0 \equiv n_0(1)$ τέτοιος ώστε $|(-1)^n - a| < 1, \forall n \geq n_0$. Τότε, για $n = 2n_0 > n_0$ θα έχουμε $|(-1)^{2n_0} - a| < 1$, δηλ. $|1 - a| < 1$ και για $n = 2n_0 + 1 > n_0$ θα έχουμε $|(-1)^{2n_0+1} - a| < 1$, δηλ. $|-1 - a| < 1$, δηλ. $|1 + a| < 1$. Συνεπώς,

$$\begin{cases} |1 - a| < 1 \\ |1 + a| < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 < -a < 0 \\ 0 < -a < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < a < 2 \\ -2 < a < 0 \end{cases}$$

δηλ. $a \in (-2, 0) \cap (0, 2) = \emptyset$, άτοπο. Συνεπώς, η ακολουθία δεν συγκλίνει.

Απόδειξη 2: Αν η ακολουθία $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$ συνέκλινε, έστω στον αριθμό a , τότε **κάθε** υπακολουθία της θα συνέκλινε (στον αριθμό a). Εδώ όμως, η ακολουθία $(b_n)_n$ των άρτιων όρων (δηλαδή $b_n = a_{2n}$) συγκλίνει στον αριθμό 1 ενώ η ακολουθία $(c_n)_n$ των περιττών όρων (δηλαδή $c_n = a_{2n+1}$) συγκλίνει στον αριθμό -1 .

¹ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ με $x > 0$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $nx > y$.

Έπεται ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών δεν είναι άνω φραγμένο.

²Η **άρνηση** του ορισμού της σύγκλισης μιας ακολουθίας στον αριθμό a , δηλ. το ότι η ακολουθία $(a_n)_n$ **δεν συγκλίνει** στον αριθμό a , είναι η

$$\exists \epsilon > 0 : \forall k \in \mathbb{N} \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ με } n_0 \geq k \text{ και τέτοιος ώστε } |a_{n_0} - a| > \epsilon.$$

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $a_n \not\rightarrow a$.

7.4 Το όριο μιας ακολουθίας είναι μοναδικό.

Απόδειξη. Πράγματι, έστω ότι $a_n \rightarrow L$ και $a_n \rightarrow M$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε, αφού $a_n \rightarrow L$, θα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - L| < \epsilon/2$, $\forall n \geq n_1$ και αφού $a_n \rightarrow M$, θα υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - M| < \epsilon/2$, $\forall n \geq n_2$. Θέτοντας $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, έχουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}|L - M| &= |L - a_n + a_n - M| \leq |L - a_n| + |a_n - M| \\ &= |a_n - L| + |a_n - M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

και αρα $L = M$.

Εναλλακτικά, έστω ότι $a_n \rightarrow L$ και $a_n \rightarrow M$ με $L \neq M \Rightarrow |L - M| > 0$. Τότε, για το $\epsilon = \frac{1}{6}|L - M| > 0$, ο ορισμός της σύγκλισης της ακολουθίας στον αριθμό L μας λέει ότι υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - L| < \epsilon = \frac{1}{6}|L - M|$, $\forall n \geq n_1$ και ομοίως, ο ορισμός της σύγκλισης της ακολουθίας στον αριθμό M μας λέει ότι υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - M| < \epsilon = \frac{1}{6}|L - M|$, $\forall n \geq n_1$. Επιλέγουμε κάποιον φυσικό αριθμό $n_0 > \max\{n_1, n_2\}$ (υπάρχει τέτοιος από την Αρχιμήδεια ιδιότητα των φυσικών αριθμών). Τότε,

$$\begin{aligned}|L - M| &= |L - a_{n_0} + a_{n_0} - M| \leq |L - a_{n_0}| + |a_{n_0} - M| \\ &= |a_{n_0} - L| + |a_{n_0} - M| < \epsilon + \epsilon \\ &= 2\epsilon = \frac{1}{3}|L - M|\end{aligned}$$

άτοπο. □