Προτεινόμενη λύση ερώτησης 6 (διορίσιμοι 2019).

Θα αποδειχθεί η ακόλουθη μορφή του ερωτήματος[1]:

> Έστω $n \in \mathbb{N}$. $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \iff$ ο n είναι τέλειο τετράγωνο (δηλ. αν γράφεται ως $n = m^2$, για κάποιο $m \in \mathbb{Z}_+$).

Απόδειξη.
($\Longrightarrow$) Έστω ότι $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow n = p/q$, όπου $p, q \in \mathbb{Z}_+$ με $q \neq 0$ και μκδ$(p, q) = 1$ και έστω ότι ο n δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Τότε στην κανονική αναπαράσταση του n, υπάρχει τουλάχιστον ενας παράγοντας p_i υψωμένος σε περιττή δύναμη.Τώρα,

$$\sqrt{n} = \frac{p}{q} \Rightarrow n = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = nq^2.$$

Τότε, ο p_i εμφανίζεται σε περιττή δύναμη στο δεξί μέλος ενώ στο αριστερό μπορεί να εμφανιστεί μόνο σε άρτια δύναμη, άτοπο, από τη μοναδικότητα της κανονικής αναπαράστασης του nq^2.

($\Longleftarrow$) Προφανές. $\square$

Παρατήρηση: Στην εκφώνηση του ερωτήματος στο εξεταστικό δοκίμιο, η πρόταση 'ο n είναι τέλειο τετράγωνο' αναφέρεται ως $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$'. Οι δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες: $\sqrt{n} \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{n} = m$, για κάποιον $m \in \mathbb{N} \Rightarrow n = m^2$, για κάποιον $m \in \mathbb{N}$.

Υπενθύμιση:

Θεώρημα 0.0.1 (Θεμελιώδες Θεώρημα της αριθμητικής)**.**
Κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γινόμενο δυνάμεων πρώτων αριθμών. Δηλαδή

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i} = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k},$$

όπου p_i πρώτοι με $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ και $n \in \mathbb{Z}_+$.

Η πιο πάνω (μοναδική) αναπαράσταση του n λέγεται **η κανονική αναπαράσταση του n ως γινόμενο πρώτων.**

Σημείωση: Εναλλακτικά για το ευθύ ($\Longrightarrow$):
Έστω ότι $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow n = p/q$, όπου $p, q \in \mathbb{Z}_+$ με $q \neq 0$ και μκδ$(p, q) = 1$ και έστω ότι ο n δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Τότε $n = p^2/q^2$, άρα $p^2 = nq^2$. Τότε ο q διαιρεί τον p^2 και αφού μκδ$(p, q) = 1 \Rightarrow q$ διαιρεί τον p. Άρα $q = 1$, συνεπώς $n = p^2$, άτοπο

[1] Το οποίο λέει ουσιαστικά ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο $\sqrt{n}$ είναι είτε φυσικός είτε άρρητος.