Προτεινόμενη λύση ερώτησης 6 (διορίσιμοι 2017).

Θα χρειαστούμε την ακόλουθη Πρόταση:

> **Πρόταση**
> Μεταξύ τριών διαδοχικών ακεραίων αριθμών, μόνο ένας είναι πολλαπλάσιο του 3.

Απόδειξη. (της Πρότασης)
Έστω $n-2, n-1, n$ τρείς (διαδοχικοί) ακέραιοι. Από τη διαίρεση του n με τον αριθμό 3 έχουμε:

$$n = 3q + r, \quad 0 \leq r < 3,$$

δηλαδή

$$n = 3q + r, \quad r = 0, 1, 2.$$

Αν $r = 0$, τότε $n = 3q$ και αρα ο 3 διαιρεί το n, αν $r = 1$, τότε $n = 3q + 1 \Rightarrow n - 1 = 3q$, δηλαδή ο ο 3 διαιρεί το $n - 1$ και αν $r = 2$, τότε $n = 3q + 2 \Rightarrow n - 2 = 3q$, δηλαδή ο ο 3 διαιρεί το $n - 2$. □

Προχωράμε στην απάντηση της ερώτησης:

Οι αριθμοί $2^n - 1$, 2^n και $2^n + 1$ είναι διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί. Συνεπώς, από την προηγούμενη Πρόταση, μόνο ένας από αυτούς μπορεί να είναι πολλαπλάσιο του 3. Αλλά, ο 2^n δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, διότι αυτή είναι και η κανονική του γραφή (η οποία είναι μοναδική). Άρα, είτε ο $2^n - 1$ είτε ο $2^n + 1$ είναι πολλαπλάσιο του 3 και το συμπέρασμα έπεται. □

2ος τρόπος: Υποθέτουμε ότι οι αριθμοί $2^n - 1$ και $2^n + 1$ είναι πρώτοι αριθμοί. Είναι

$$(2^n - 1)(2^n + 1) = 2^{2n} - 1 = 4^n - 1 = (4 - 1) \sum_{i=0}^{n-1} 4^i \cdot 1^{n-1-i} = 3 \sum_{i=0}^{n-1} 4^i,$$

δηλαδή ο αριθμός $(2^n - 1)(2^n + 1)$ είναι πολλαπλάσιο του 3, άτοπο, αφού το γινόμενο $(2^n - 1)(2^n + 1)$ ως γινόμενο πρώτων αριθμών έχει μόνο 4 κανονικούς θετικούς διαιρέτες και αφού $n \geq 3$, ο 3 δεν είναι ένας από αυτούς. □

Υπενθύμιση:

Θεώρημα 0.0.1 (Θεμελιώδες Θεώρημα της αριθμητικής)**.**
Κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γινόμενο δυνάμεων πρώτων αριθμών. Δηλαδή

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i} = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k},$$

όπου p_i πρώτοι με $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ και $n \in \mathbb{Z}_+$.

Η πιο πάνω (μοναδική) αναπαράσταση του n λέγεται **η κανονική αναπαράσταση του n ως γινόμενο πρώτων.**