Προτεινόμενη λύση Άσκησης 4 (διορίσιμοι 2021). (25/12/2021)

4.2.-2ος τρόπος-με χρήση του ορισμού ορίου.
Θα δείξουμε ότι το όριο

$$\lim_{x\to+\infty} x\text{ημ}x$$

δεν υπάρχει.

Υπενθύμιση:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists M>0,\ \text{τέτοιο ώστε } \forall x>M \ \Rightarrow\ |f(x)-L|<\varepsilon.$$

Αν υπάρχει $L\in\mathbb{R}$ έτσι ωστε $\lim_{x\to+\infty} x\text{ημ}x = L$, τότε από τον ορισμό του ορίου για $\epsilon=1$, υπάρχει $M>0$ τέτοιο ώστε $\forall x>M \Rightarrow |x\text{ημ}x-L|<1$, δηλάδή $|x\text{ημ}x-L|<1$.
Θέτουμε $N=\max\{L,M\}$. Τότε, για το $x_0=2N\pi+\frac{\pi}{2}$, είναι $x_0>M$ αλλά,

$$\begin{aligned}|x_0\text{ημ}x_0-L| &= |(2N\pi+\pi/2)\cdot\text{ημ}(2N\pi+\pi/2)-L|\\ &= |(2N\pi+\pi/2)\cdot\text{ημ}(\pi/2)-L|\\ &= |2N\pi+\pi/2-L|>1,\end{aligned}$$

αφού $N>L$. Άτοπο.

Άρα, το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} x\text{ημ}x$ δεν υπάρχει.