Προτεινόμενη λύση Άσκησης 4 (διορίσιμοι 2021).

Μια μικρή **παρατήρηση** πριν τη λύση. Στην εκφώνηση της άσκησης ζητείται 'να υπολογιστεί το όριο όπου υπάρχει, διαφορετικά να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει'.
Τί γίνεται όμως στην περίπτωση που ένα σημείο x_0 δεν είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f; Δεν έχει καν νόημα να μιλάμε για το $\lim_{x\to x_0} f(x)$.
Συνεπώς, η ερώτηση 4.4 μπορεί να χαρακτηριστεί ως ερώτηση-παγίδα, υπό την έννοια ότι ο υποψήφιος ψάχνει αν **υπάρχει** το όριο, δηλαδή αν ΥΠΑΡΧΕΙ και ανήκει στο εκτεταμένο σύνολο $\overline{\mathbb{R}}$ των πραγματικών αριθμών και έτσι μπορεί να μπερδευτεί, αν όχι να θέσει υπό αμφισβήτηση τα Μαθηματικά που ξέρει.

4.1. Απλό όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \eta\mu x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{\eta\mu x}{x}\right).$$

Τώρα, για $x > 0$, είναι

$$0 \le \left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \le \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x}$$

και αφού $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, έπεται από το κριτήριο της παρεμβολής ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0.$$

Συνεπώς,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{\eta\mu x}{x}\right) = 1 - \lim_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1.$$

4.2. Αυτό το όριο είναι κλασσικό για κάποιον που διδάσκεται τα όρια σε πανεπιστημιακού επιπέδου μάθημα Μαθηματικών, αφού χρησιμοποιεί το 'χαρακτηρισμό' του ορίου συνάρτησης μέσω ακολουθιών, κάτι το οποίο φυσικά ξεφεύγει από τα σχολικά πλαίσια:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \ \forall (a_n)_n \subseteq \mathbb{R} \text{ με } x_n \to \infty, \text{ τότε } f(x_n) \to L.$$

Θεωρούμε τις ακολουθίες $(x_n)_n$ με $x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}$ και $(y_n)_n$ με $x_n = 2n\pi,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε $x_n \to +\infty$ και $y_n \to +\infty$ αλλά

$$f(x_n) = f(2n\pi + \pi/2) = f(\pi/2) = \frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}$$

ενώ

$$f(y_n) = f(2n\pi) = 0 \to 0.$$

Άρα, το όριο $\lim_{x\to+\infty} x\eta\mu x$ δεν υπάρχει.

4.3. Είναι

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} + 1, & x < 1 \\ \sqrt{x-1} + 1, & x \ge 1 \end{cases} \ = \ |x-1|^{1/2} + 1.$$

Τότε, είτε χρησιμοποιώντας πλευρικά όρια, είτε τη συνέχεια της συνάρτησης απόλυτη τιμή, βρίσκουμε

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1.$$

4.4. Εδώ μπορεί να παρασυρθεί κανείς και να 'περάσει' το όριο εντός της (τετραγωνικής) ρίζας.

Αυτό όμως είναι λάθος, αφού μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι η συνάρτηση $h(x) = x^2(x-1)(x+1)$ (με πίνακα προσήμου) είναι ≤ 0 στο διάστημα $[-1,1]$ (με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 0, \pm 1$). Συνεπώς, το σημείο $x = 0$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της $f(x) = \sqrt{x^2(x-1)(x+1)}$, το οποίο είναι το $\mathbb{R} - (-1,1)$ και άρα δεν έχει καν νόημα να μιλάμε για το $\lim_{x \to 0} f(x)$.

Σημείωση: Γνωρίζουμε το ακόλουθο:

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to x_0} f(x)},$$

για $n \in \mathbb{N}$.
Αν ο n είναι άρτιος, υποθέτουμε ότι είτε $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$, είτε $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ και η $x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$ ορίζεται σε μια περιοχή του $x = 0$.