Προτεινόμενη λύση Άσκησης 4 (διορίσιμοι 2017)

Ας δούμε πρώτα πως θα καταλάβουμε (έστω ως καθηγητές) διαισθητικά σε ποιά σημεία η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη. Κατ΄ αρχάς, η παρουσία του απολύτου στο x δείχνει ότι στο σημείο $x = 0$ η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη. Επίσης, (γιατί;) στα σημεία στα οποία η εξίσωση $x^2 + |x| - 2 = 0$ έχει λύσεις θα είναι σημεία στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.[1]

4.1 Λόγω της συμμετρίας περί του άξονα των τεταγμένων της συνάρτησης g με τύπο $g(x) = |x|$, αρκεί να τη μελετήσουμε για $x \geq 0$. Είναι για $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} x^2 + |x| - 2 = 0 &\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Η άλλη τιμή είναι η συμμετρική της $x = 1$ περί του άξονα των τεταγμένων, δηλαδή η $x = -1$. Επιπλέον, η f δεν παραγωγίζεται στο $x = 0$ λόγω της παρουσίας της παράστασης $|x|$.

Δείχνουμε ότι η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $x = 0$ και $x = 1$.
Λόγω του ότι η συνάρτηση είναι άρτια, θα έπεται ότι δεν είναι ούτε παραγωγίσιμη στο σημείο $x = -1$.
Έχουμε για $1 > x \geq 0 :\ f(x) = -(x^2 + x - 2) = -x^2 - x + 2$ και για $x \geq 1 :\ f(x) = x^2 + x - 2$.
Λόγω του ότι η συνάρτηση είναι άρτια, θα είναι και $f(x) = -x^2 + x + 2$ για $-1 \leq x < 0$ και για $x < -1 :\ f(x) = x^2 - x - 2$. Έτσι,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2, & x < -1 \\ -x^2 + x + 2, & -1 \leq x < 0 \\ -x^2 - x + 2, & 0 \leq x < 1 \\ x^2 + x - 2, & x \geq 1 \end{cases}.$$

Είναι

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{h \to 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{f(h) - 2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0-} \frac{-h^2 + h + 2 - 2}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{-h^2 + h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0-} (1 - h) = 1 \end{aligned}$$

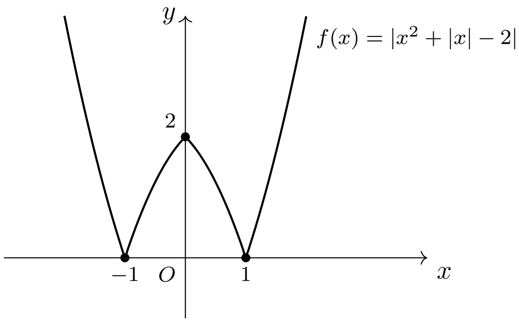
και

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{f(h) - 2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0+} \frac{-h^2 - h + 2 - 2}{h} = -\lim_{h \to 0+} \frac{h^2 + h}{h} \\ &= -\lim_{h \to 0+} (1 + h) = -1 \end{aligned}$$

και αρα $f'_-(0) \neq f'_+(0)$. Συνεπώς, δεν υπάρχει η $f'(0)$. Ομοίως, δείχνουμε ότι δεν υπάρχει η $f'(1)$. Λόγω του ότι η συνάρτηση είναι άρτια+συνεχής, δε θα υπάρχει ούτε η $f'(-1)$.

Άρα, ο Μαθητής Β είναι ο σωστός.

[1] Ιδιαίτερα, στα σημεία αυτά, έχουμε οξέα άκρα (cusps) τα οποία δημιουργούνται ακριβώς από την παρουσία της απόλυτης τιμής έξωθεν της παραβολής $g(x) = x^2 + |x| - 2$.



4.2 Ο Μαθητής Α δεν έχει κατανοήσει ότι η παρουσία της απόλυτης τιμής δίνει «γωνιακά» σημεία στο γράφημά της. Επιπλέον, δεν έχει κατανοήσει ότι στα σημεία του γραφήματος μιας συνάρτησης όπου υπάρχουν «γωνίες», η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη.
Ο Μαθητής Γ δεν έχει κατανοήσει ότι η ανάκλαση του γραφήματος της συνάρτησης ως προς τον άξονα των τεταγμένων αφήνει αναλλοίωτα τα «γωνιακά» σημεία που ανήκουν στον άξονα των τεταγμένων (θεώρησε ότι η παρουσία 2 απολύτων δίνει 4 σημεία).