Προτεινόμενη λύση Άσκησης 10 (διορίσιμοι 2021).

α) Προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου (τριγώνου) το οποίο αναφέρει *'κάθε διχοτόμος τριγώνου χωρίζει την απέναντι πλευρά σε ανάλογα σε μήκος τμήματα προς τις απέναντι πλευρές'* (δές μετά το πέρας της λύσης) και τις ιδιότητες των αναλογίων:

Από το Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου στο $\triangle AB\Gamma$ έχουμε

$$\frac{(A\Gamma)}{(AB)} = \frac{(\Delta\Gamma)}{(B\Delta)} \quad \Rightarrow \quad \frac{(A\Gamma)+(AB)}{(AB)} = \frac{(\Delta\Gamma)+(B\Delta)}{(B\Delta)} = \frac{(B\Gamma)}{(B\Delta)}$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{(B\Delta) = \frac{(B\Gamma)\cdot(AB)}{(AB)+(A\Gamma)}}\,.$$

Θεώρημα 0.0.1. *(Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου)*

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Τότε, αν η ευθεία ΑΔ είναι διχοτόμος στο $\triangle$ΑΒΓ, ισχύει $\frac{(\mathrm{AB})}{(\mathrm{A\Gamma})} = \frac{(\mathrm{B\Delta})}{(\mathrm{\Gamma\Delta})}$ και αντίστροφα, δηλ. αν Δ σημείο στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου έτσι ώστε $\frac{(\mathrm{AB})}{(\mathrm{A\Gamma})} = \frac{(\mathrm{B\Delta})}{(\mathrm{\Gamma\Delta})}$, τότε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ είναι διχοτόμος (της γωνίας $\widehat{\mathrm{A}}$).

Απόδειξη. **(Ευθύ)** Έστω ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ είναι διχοτόμος στο $\triangle$ΑΒΓ. Φέρουμε τις προβολές Ε και Ζ του σημείου Δ πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα και το ύψος ΑΗ. Τότε $\triangle$ΑΔΕ=$\triangle$ΑΔΖ (κοινή πλευρά, γωνία, ορθή) και αρα (ΔΕ)=(ΔΖ).
$\triangle\mathrm{ABH} \approx \triangle\mathrm{B\Delta E} \Rightarrow \frac{(\mathrm{AB})}{(\mathrm{B\Delta})} = \frac{(\mathrm{AH})}{(\mathrm{\Delta E})} = \frac{(\mathrm{BH})}{(\mathrm{BE})}$ και συνεπώς

$$\frac{(\mathrm{AB})}{(\mathrm{B\Delta})} = \frac{(\mathrm{AH})}{(\mathrm{\Delta Z})}. \tag{1}$$

$\triangle\mathrm{AH\Gamma} \approx \triangle\mathrm{\Gamma Z\Delta} \Rightarrow \frac{(\mathrm{AH})}{(\mathrm{\Gamma Z})} = \frac{(\mathrm{H\Gamma})}{(\mathrm{Z\Delta})} = \frac{(\mathrm{A\Gamma})}{(\mathrm{\Gamma\Delta})}$ και συνεπώς

$$\frac{(\mathrm{A\Gamma})}{(\mathrm{\Gamma\Delta})} = \frac{(\mathrm{AH})}{(\mathrm{\Delta Z})}. \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) έχουμε

$$\frac{(\mathrm{AB})}{(\mathrm{A\Gamma})} = \frac{(\mathrm{B\Delta})}{(\mathrm{\Gamma\Delta})}.$$

(Αντίστροφο) Έστω Δ σημείο στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου έτσι ώστε $\frac{(\mathrm{AB})}{(\mathrm{A\Gamma})} = \frac{(\mathrm{B\Delta})}{(\mathrm{\Gamma\Delta})}$. Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ′. Τότε $\frac{(\mathrm{AB})}{(\mathrm{A\Gamma})} = \frac{(\mathrm{B\Delta'})}{(\mathrm{\Delta T})}$, συνεπώς,

$$\frac{(\mathrm{B\Delta})}{(\mathrm{\Delta\Gamma})} = \frac{(\mathrm{B\Delta'})}{(\mathrm{\Delta T})} \Rightarrow \frac{(\mathrm{B\Delta})+(\mathrm{\Delta\Gamma})}{(\mathrm{\Delta\Gamma})} = \frac{(\mathrm{B\Delta'})+(\mathrm{\Delta T})}{(\mathrm{\Delta T})} \Rightarrow \frac{(\mathrm{B\Gamma})}{(\mathrm{\Delta\Gamma})} = \frac{(\mathrm{B\Gamma})}{(\mathrm{\Delta T})}$$

δηλ. (ΔΓ)=(ΔΤ) και αρα Δ′≡Δ. □

Μια άλλη απόδειξη με το νόμο των ημιτόνων:

Κάθε διχοτόμος τριγώνου χωρίζει την απέναντι πλευρά σε ανάλογα σε μήκος τμήματα προς τις απέναντι πλευρές.

Απόδειξη. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας $\widehat{\mathrm{A}}$. Από το νόμο ημιτόνων στο $\triangle$ΑΒΔ έχουμε

$$\frac{(\mathrm{B}\Delta)}{\sin(\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta)} = \frac{\gamma}{\sin(\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{B})}$$

και από το νόμο ημιτόνων στο $\triangle$ΑΔΓ έχουμε

$$\frac{(\Delta\Gamma)}{\sin(\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta)} = \frac{\beta}{\sin(\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{B})}.$$

Άρα, $\dfrac{(\mathrm{B}\Delta)}{\gamma} = \dfrac{\sin(\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{B})}{\sin(\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{B})} = \dfrac{(\Delta\Gamma)}{\beta}$, δηλ.

$$\boxed{\frac{(\mathrm{B}\Delta)}{(\Delta\Gamma)} = \frac{\gamma}{\beta}}.$$

$\square$