

Βασικές Τριγωνομετρικές ταυτότητες

①

$$\eta\tau(\alpha+\beta) = \eta\tau\alpha \cdot \sigma\upsilon\beta + \eta\tau\beta \cdot \sigma\upsilon\alpha$$

$$\eta\tau(\alpha-\beta) = \eta\tau\alpha \cdot \sigma\upsilon\beta - \eta\tau\beta \cdot \sigma\upsilon\alpha$$

$$\sigma\omega(\alpha+\beta) = \sigma\omega\alpha \cdot \sigma\upsilon\beta - \eta\tau\alpha \cdot \eta\tau\beta$$

$$\sigma\omega(\alpha-\beta) = \sigma\omega\alpha \cdot \sigma\upsilon\beta + \eta\tau\alpha \cdot \eta\tau\beta$$

$$\varepsilon\phi(\alpha+\beta) = \frac{\varepsilon\phi\alpha + \varepsilon\phi\beta}{1 - \varepsilon\phi\alpha \cdot \varepsilon\phi\beta}, \quad \varepsilon\phi(\alpha-\beta) = \frac{\varepsilon\phi\alpha - \varepsilon\phi\beta}{1 + \varepsilon\phi\alpha \cdot \varepsilon\phi\beta}$$

$$\sigma\phi(\alpha+\beta) = \frac{\sigma\phi\alpha \cdot \sigma\phi\beta - 1}{\sigma\phi\alpha + \sigma\phi\beta}, \quad \sigma\phi(\alpha-\beta) = \frac{\sigma\phi\alpha \cdot \sigma\phi\beta + 1}{\sigma\phi\beta - \sigma\phi\alpha}$$

$$\eta\tau 2\alpha = 2\eta\tau\alpha \sigma\upsilon\alpha$$

$$\eta\tau^2\alpha = \frac{-\sigma\omega 2\alpha + 1}{2}, \quad \sigma\omega^2\alpha = \frac{\sigma\omega 2\alpha + 1}{2}$$

$$\sigma\omega^2\alpha - \eta\tau^2\alpha = \sigma\omega 2\alpha$$

$$2\eta\tau\alpha \cdot \sigma\upsilon\beta = \eta\tau(\alpha+\beta) + \eta\tau(\alpha-\beta), \text{ δηλ. } \eta\tau\alpha \cdot \sigma\upsilon\beta = \frac{1}{2} [\eta\tau(\alpha+\beta) + \eta\tau(\alpha-\beta)]$$

$$2\sigma\omega\alpha \cdot \sigma\upsilon\beta = \sigma\omega(\alpha-\beta) + \sigma\omega(\alpha+\beta), \text{ δηλ. } \sigma\omega\alpha \cdot \sigma\upsilon\beta = \frac{1}{2} [\sigma\omega(\alpha-\beta) + \sigma\omega(\alpha+\beta)]$$

$$2\eta\tau\alpha \cdot \eta\tau\beta = \sigma\omega(\alpha-\beta) - \sigma\omega(\alpha+\beta), \text{ δηλ. } \eta\tau\alpha \cdot \eta\tau\beta = \frac{1}{2} [\sigma\omega(\alpha-\beta) - \sigma\omega(\alpha+\beta)]$$

$$\eta\tau\alpha - \eta\tau\beta = 2\eta\tau\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot \sigma\upsilon\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

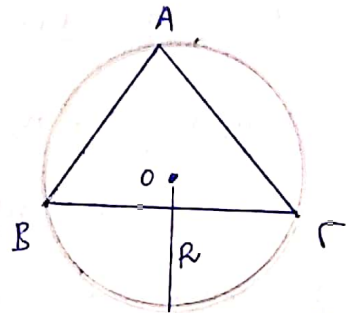
$$\sigma\omega\alpha + \sigma\omega\beta = 2\sigma\omega\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot \sigma\upsilon\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\sigma\omega\alpha - \sigma\omega\beta = 2\eta\tau\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \eta\tau\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$$

$$\eta\tau\alpha + \eta\tau\beta = 2\eta\tau\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sigma\upsilon\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Νόμος ημίγων

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\hat{A}} = \frac{\beta}{\eta\mu\hat{B}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\hat{\Gamma}} = 2R$$

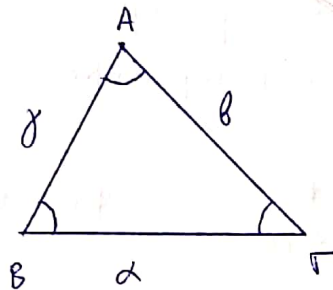


Νόμος ομνημίγων

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos \hat{A}$$

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma \cos \hat{B}$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \hat{\Gamma}$$



$$\cos \hat{A} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma}$$

$$\cos \hat{\Gamma} = \frac{\beta^2 + \alpha^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}$$

Νόμοι - Αναλογίες

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{\gamma + \delta}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha - \beta}{\beta} = \frac{\gamma - \delta}{\delta}$$

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \dots = \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{\beta_1 + \dots + \beta_n} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i}{\sum_{i=1}^n \beta_i}$$

Άσκηση

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{\gamma - \delta}{\gamma + \delta}$$

Λύση

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{\gamma}{\gamma + \delta} \quad \text{και} \quad \frac{\beta}{\alpha + \beta} = \frac{\delta}{\gamma + \delta}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha + \beta} - \frac{\beta}{\alpha + \beta} = \frac{\gamma}{\gamma + \delta} - \frac{\delta}{\gamma + \delta}$$

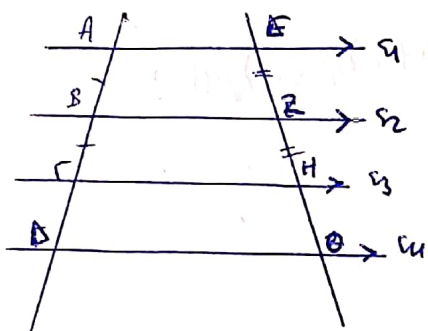
$$\Rightarrow \boxed{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{\gamma - \delta}{\gamma + \delta}}$$

$$\text{π.χ.} \quad \frac{1}{2} = \frac{5}{10} \Rightarrow \frac{1-2}{2+1} = \frac{5-10}{5+10}$$

$$\quad \quad \quad -\frac{1}{3} \quad \quad \quad -\frac{5}{15}$$

Θεώρημα του Θαλή

Γνωστό: Αν παράλληλες ευθείες τέρνον δύο άλλες ευθείες και ορίξω πάνω στη μία ίσα τμήματα, τότε θα ορίξω ίσα τμήματα και πάνω στην άλλη.

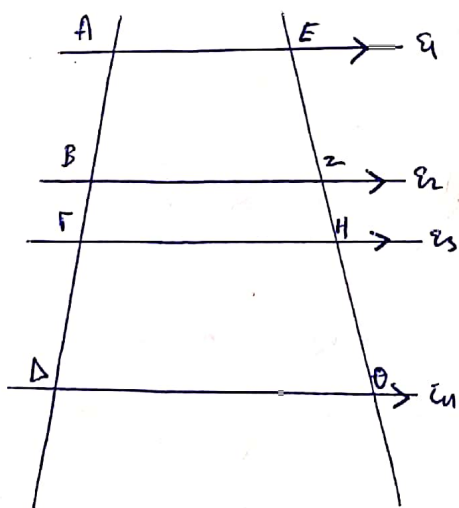


$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_1 \parallel \epsilon_2 \\ AB = \Gamma\Delta \end{array} \right\} \Rightarrow \epsilon_2 = \epsilon_1$$

Γενίκευση του πιο πάνω:

Θεώρημα (του Θαλή)

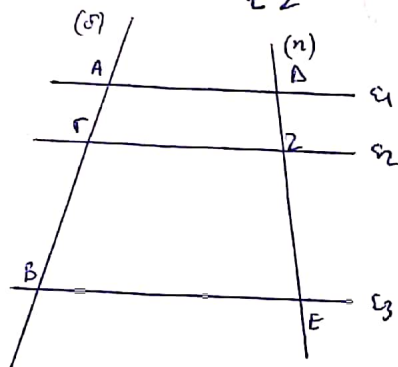
Αν παράλληλες ευθείες τέρνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα αποκοπτόμενα τμήματα πάνω στην μία ευθεία είναι ανάλογα με τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται πάνω στην άλλη.



$$\epsilon_1 \parallel \epsilon_2 \parallel \epsilon_3 \parallel \epsilon_4 \Rightarrow \frac{AB}{EZ} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{\Gamma\Delta}{H\Theta} = \frac{A\Gamma}{EH}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{AB}{EZ} = \frac{A\Gamma}{EH} & \text{ή} & \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{EZ}{EH} \\ \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{AB}{EZ} & \text{ή} & \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{EZ}{ZH} \\ \frac{A\Gamma}{EH} = \frac{B\Gamma}{ZH} & \text{ή} & \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{EH}{ZH} \\ \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{\Gamma\Delta}{H\Theta} & \text{ή} & \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{ZH}{H\Theta} \end{array} \right.$$

Αντίστροφα, αν δύο ευθείες (σ) και (η) τέμνονται από δύο παράλληλες ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) στα σημεία A, B και Δ, ϵ αντιστοίχως, και αν Γ και 2 είναι τα σημεία των αντισυμμετρικών τμημάτων AB και $\Delta\epsilon$ τέτοια ώστε

$$\frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{\Delta 2}{\epsilon 2}, \text{ τότε } (\Gamma 2) \parallel (\epsilon 2) \parallel (\epsilon_1)$$


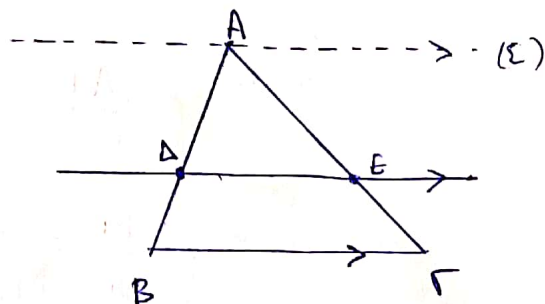
Πρόταση

Έστω τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$. Αν μία ευθεία παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και ϵ αντιστοίχως, τότε $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{A\epsilon}{\epsilon \Gamma}$.

Απόδειξη

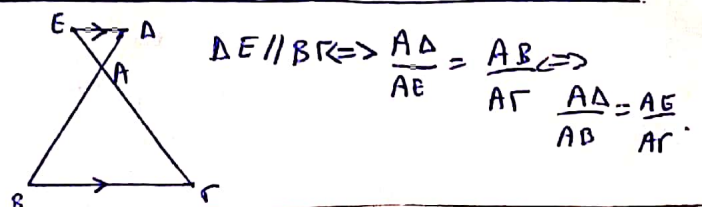
$\Delta\epsilon \parallel B\Gamma$. Φέρουμε ευθεία $(\epsilon) \parallel \Delta\epsilon$ η οποία περνά από τον κορυφή A του τριγώνου. Από το θ. ευθείας η,

$$\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{A\epsilon}{\epsilon \Gamma}.$$



Ισχύει και το αντίστροφο: αν μία ευθεία τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ ως τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ στα σημεία Δ και ϵ αντιστοίχως, έτσι ώστε

$$\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{A\epsilon}{\epsilon \Gamma}, \text{ τότε } \Delta\epsilon \parallel B\Gamma.$$

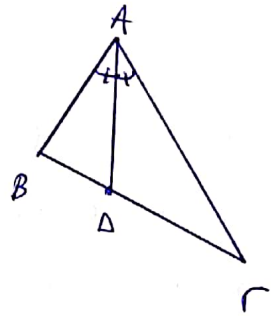


Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου τριγώνου

(5)

$$\left. \begin{array}{l} \triangle AB\Gamma \\ AD \text{ διχοτόμος} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{BD}{D\Gamma}, \text{ δηλ. } \frac{AB}{BD} = \frac{A\Gamma}{D\Gamma}$$

και αντίστροφα.



Σημείωση:

$$AD \text{ διχοτόμος} \Rightarrow \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{BD}{D\Gamma} \Rightarrow \frac{AB+A\Gamma}{A\Gamma} = \frac{BD+D\Gamma}{D\Gamma} \\ \Rightarrow \boxed{\frac{AB+A\Gamma}{A\Gamma} = \frac{B\Gamma}{D\Gamma}}$$

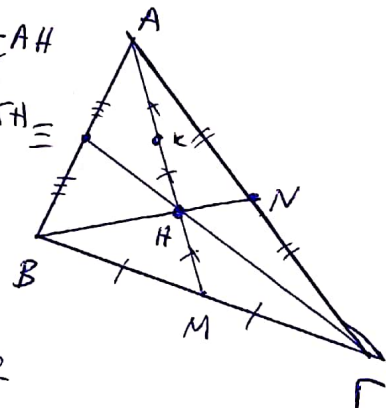
Πρώτο Θεώρημα Διαμέσου

$\triangle AB\Gamma$, Η κέντρο βάρους/βαρίκεντρο (= σημείο τομής των διαμέσων).

Τότε, $AH = \frac{2}{3} AM$, $AM = \frac{1}{3} AH$, $HM = \frac{1}{3} AH$

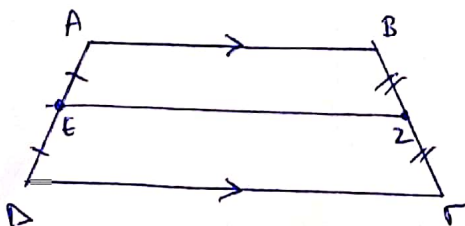
$\Gamma H = \frac{2}{3} \Gamma N$, $HN = \frac{1}{3} \Gamma H$, $HN = \frac{1}{3} \Gamma H$

$BH = \frac{2}{3} BN$, $HN = \frac{1}{3} BN$, $HN = \frac{1}{3} BN$



Σημείωση: αν Κ μέσον του ΑΗ, τότε
(ΑΚ) = (ΚΗ) = (ΗΜ).

Θεώρημα



$$\left\{ \begin{array}{l} Ε \text{ μέσον } AD \\ Ζ \text{ μέσον } ΒΓ \end{array} \right\} \Rightarrow ΕΖ // = \frac{AB+ΓΔ}{2}$$

Άσκηση 1

Έστω θ το σημείο κοπής των διχοτόμων του τριγώνου $AB\Gamma$. Από το θ φέρουμε οποιούσα ευθεία (ϵ) . Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των αποστάσεων από τις κορυφές B και Γ του τριγώνου ~~από~~ από την ευθεία αυτή ισούται με την απόσταση της κορυφής A από την ίδια ευθεία.

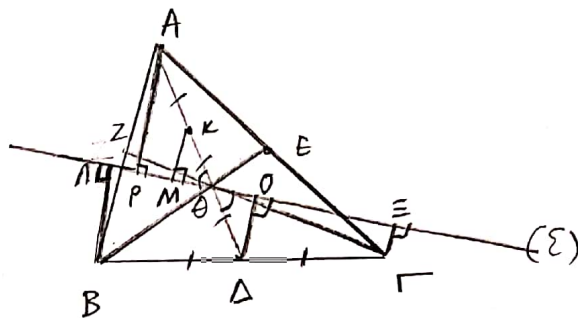
Λύση

θ = το βαρύκεντρο του $\triangle AB\Gamma$

Φέρω $B\eta, AP, \Gamma\epsilon \perp (\epsilon)$.

Θα δείξω ότι

$$(B\eta) + (\Gamma\epsilon) = (AP).$$



Φέρω $\Delta O \perp (\epsilon)$. Αν K το μέσον του $A\theta$, από το πρώτο θεωρήμα διαμέσων, $AK = K\theta = \theta\Delta$.

Είναι $\hat{\Delta}\theta \approx \hat{M}K\theta$ ($\pi - \gamma - \alpha$) $\Rightarrow$

K μέσον του $A\theta$

$MK \parallel AP$ ($KM \perp (\epsilon), AP \perp (\epsilon)$)

$$\frac{K\theta}{\Delta\theta} = \frac{KM}{O\Delta}$$

$$(KM) = \frac{1}{2}(AP)$$

$$\frac{AP}{O\Delta} = 2$$

①

Τώρα,

$$O\Delta \parallel = \frac{(\epsilon\Gamma) + (\eta B)}{2}$$

②

(θ . Θαλή)

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \Rightarrow \frac{(AP)}{(\epsilon\Gamma) + (\eta B)} = 1 \Rightarrow \underline{(AP) = (\epsilon\Gamma) + (\eta B)}$$

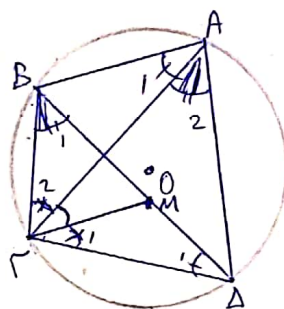
Άσκηση 2 (Θεώρημα του Πτολεμαίου)

Έστω $AB\Gamma\Delta$ κυρτό τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο. Τότε, το άθροισμα των γινομένων των γιγώντων των αντίθετων πλευρών του ισούται με το γινόμενο των διαγωνίων του.

Λύση

Θα δείξω ότι

$$(AD) \cdot (BF) + (AB) \cdot (FD) = (AF) \cdot (BD)$$



Στη χορδή ΒΔ επιζείν σημείο Μ ούτως ώστε $\widehat{M\Gamma\Delta} = \widehat{A\Gamma B}$

• $B\hat{A}\Gamma \approx M\hat{\Delta}\Gamma$ ($\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_1$ - βαίνουν στο ίδιο τόξο, $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$ - από κατασκευή)

$$\Rightarrow \frac{(AB)}{(MD)} = \frac{(A\Gamma)}{(GD)} \Rightarrow (AB) \cdot (GD) = (A\Gamma) \cdot (MD) \quad (1)$$

• $B\hat{\Gamma}M \approx A\hat{\Gamma}A$ ($\hat{B}_1 = \hat{A}_2$ - βαίνουν στο ίδιο τόξο, $A\hat{\Gamma}\Delta = B\hat{\Gamma}M$)

$$\Rightarrow \frac{(AD)}{(BF)} = \frac{(AF)}{(MB)} \Rightarrow (AD) \cdot (BF) = (AF) \cdot (MB) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (1), (2) \Rightarrow (AB) \cdot (GD) + (BF) \cdot (AD) &= (A\Gamma) \cdot (MD) + (AF) \cdot (MB) \\ &= (A\Gamma) [(MD) + (MB)] \\ &= (A\Gamma) \cdot (BD) \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Να δείξω ότι οι αποστάσεις των σημείων της διαίρεσης τριγώνου από τις πλευρές που διέρχονται από την ίδια κορυφή είναι αντιστρόφως ανάλογες προς τις πλευρές αυτές.

Μέση (Με χρήση φθαδού τριγώνων)

$\triangle AB\Gamma$, AM διάμεσος

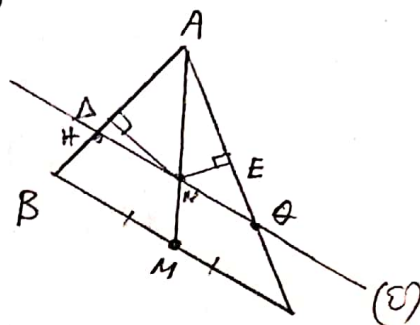
N κέντρο σφαιρώ της διαγωνίου

AM . Φέρουμε $ND \perp AB$ και

$NE \perp A\Gamma$.

Αν το N σφαιρείται ως προς A , συνάγει ότι διζότεύεται.

Αν το N σφαιτείται με το M , τότε:



$$AM \text{ διάμεσος} \Rightarrow \angle ABM = \angle A\Gamma M \Rightarrow (AB) \cdot (MD) = (A\Gamma) \cdot (ME)$$

$$\Rightarrow \frac{(AB)}{(A\Gamma)} = \frac{(ME)}{(MD)}$$

και άρα ισχύει.

Αν το N δε σφαιτείται ούτε με το M ούτε με την κορυφή A ,
τότε φέρουμε ευθεία $(\epsilon) \parallel B\Gamma$ η οποία περνά από το N
και τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία H και Θ
αντίστοιχα. Τότε,

$$\left. \begin{array}{l} (\epsilon) \parallel B\Gamma \\ AM \text{ διάμεσος} \\ N \in AM \end{array} \right\} \Rightarrow N \text{ μέσον της } H\Theta \Rightarrow AN \text{ διάμεσος στο } \triangle A\Theta H$$

$$\Rightarrow \angle AHN = \angle AN\Theta \Rightarrow (AH) \cdot (ND) = (A\Theta) \cdot (NE)$$

$$\Rightarrow \frac{(AH)}{(A\Theta)} = \frac{(NE)}{(ND)} \quad (1)$$

Αλλά θ θανά $\Rightarrow$

$$\frac{(AH)}{(A\Theta)} = \frac{(AB)}{(A\Gamma)} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{(AB)}{(A\Gamma)} = \frac{(NE)}{(ND)} //$$

Άσκηση 4

Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των αποστάσεων κάθε εσωτερικού σημείου M ενός ισόπλευρου τριγώνου από τις πλευρές του είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο από την επιλογή του M .

Λύση (Με χρήση εμβαδών τριγώνου)

Έστω $M \in \text{int}(\triangle AB\Gamma)$. Φέρουμε

$MD \perp AB$, $ME \perp B\Gamma$ και $MZ \perp A\Gamma$.

Τότε

$$E_{AB\Gamma} = E_{M\hat{B}\Gamma} + E_{M\hat{A}B} + E_{M\hat{A}\Gamma}$$

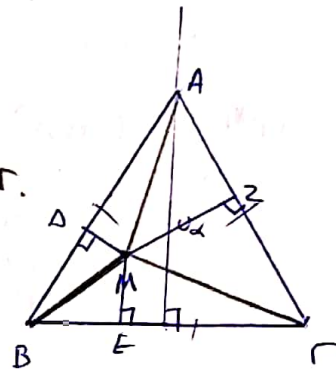
$$\Rightarrow 1 = \frac{E_{M\hat{B}\Gamma}}{E_{AB\Gamma}} + \frac{E_{M\hat{A}B}}{E_{AB\Gamma}} + \frac{E_{M\hat{A}\Gamma}}{E_{AB\Gamma}}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{(\cancel{B\Gamma}) \cdot (ME)}{(\cancel{B\Gamma}) \cdot \nu_a} + \frac{(\cancel{AB}) \cdot (MD)}{(\cancel{AB}) \cdot \nu_a} + \frac{(\cancel{A\Gamma}) \cdot (MZ)}{(\cancel{A\Gamma}) \cdot \nu_a}$$

$$\Rightarrow \nu_a = (ME) + (MD) + (MZ)$$

Τέλος, το ν_a είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του M :

$$\text{πρ } \hat{\beta} = \frac{\nu_a}{(AB)} \Rightarrow \boxed{\nu_a = \frac{\sqrt{3}}{2} (AB)}$$



$\nu_a = \nu_b = \nu_\gamma$,
αφού $\triangle AB\Gamma$ ισόπλευρο

Άσκηση 5

Έστω ^{ισόπλευρο} τριγωνο $AB\Gamma$. Τότε, ~~πρ~~ το άθροισμα των αποστάσεων οποιουδήποτε σημείου που ανήκει στο ελάχιστον πόζο AB του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ισούται με την απόσταση του σημείου αυτού από την κορυφή A του τριγώνου.

Λύση

Θα δείξουμε ότι $(MA) = (MB) + (MF)$.

1^{ος} τρόπος (με χρήση όμοιων τριγώνων)

Θεωρούμε σημείο Δ πάνω στην AM, ούτως ώστε $(MD) = (MB)$.

Το $\triangle BDM$ είναι ισοπλευρό (ισοσκελές με $\angle BMD = 60^\circ$).

Άρα, $(MB) = (MD) = (BD)$.

$\triangle BMF = \triangle BDA$ ($(BM) = (BD)$, $(AB) = (BF)$ και $\angle BAM = \angle FBM$ (βρίσκουν στο ίδιο τόξο))

$\Rightarrow (MF) = (AD)$.

Συνεπώς, $(MF) + (MB) = (AD) + (DM) = (AM)$.

2^{ος} τρόπος (με χρήση τριγωνομετρίας) $\rightarrow$ ίδια: σύνδεση των γωνιών των ενδογώνιων $\triangle BMA$, $\triangle MBF$ και $\triangle MFA$.

Νόμος συνημιτόνων στο $\triangle BMA$:

$$\begin{aligned} (AB)^2 &= (MA)^2 + (MB)^2 - 2(MA) \cdot (MB) \cdot \cos 60^\circ \\ &= (MA)^2 + (MB)^2 - (MA) \cdot (MB). \end{aligned}$$

Νόμος συνημιτόνων στο $\triangle BMF$:

$$\begin{aligned} (BF)^2 &= (MF)^2 + (MB)^2 - 2(MF) \cdot (MB) \cdot \cos 120^\circ \\ &= (MF)^2 + (MB)^2 + (MF) \cdot (MB) \end{aligned}$$

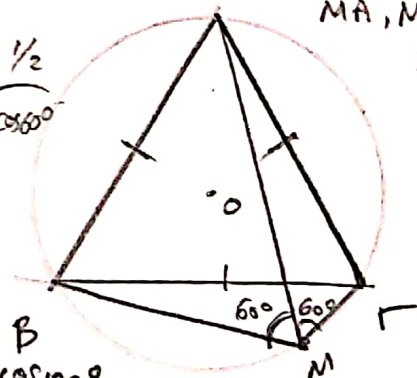
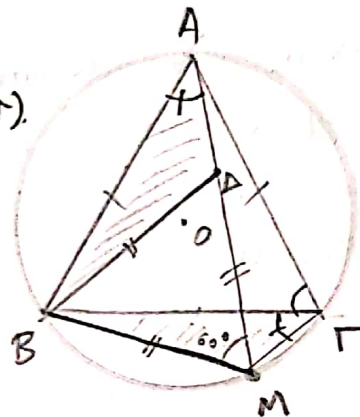
αφού $(AB) = (BF)$

$$\Rightarrow (MA)^2 + (MB)^2 - (MA) \cdot (MB) = (MF)^2 + (MB)^2 + (MB) \cdot (MF)$$

$$\Rightarrow (MA)^2 - (MF)^2 - (MB) \cdot (MF) - (MA) \cdot (MB) = 0$$

$$\Rightarrow [(MA) - (MF)] \cdot [(MA) + (MF)] - (MB) [(MA) + (MF)] = 0$$

$$\Rightarrow [(MA) + (MF)] \cdot [(MA) - (MF) - (MB)] = 0 \Rightarrow (MA) - (MF) - (MB) = 0 \quad (MA) + (MF) > 0 \Rightarrow (MA) = (MB) + (MF)$$



Άσκηση 6

(11)

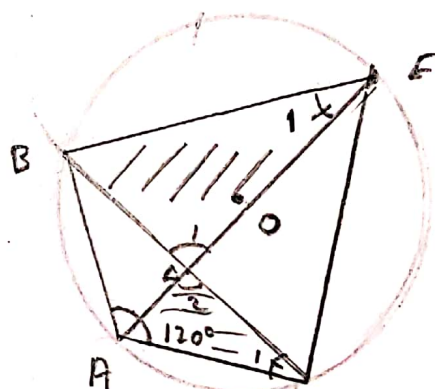
Να δοχθεί ότι σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A}=120^\circ$, το μήκος της διχοτόμου AD είναι ίσο με το γόνο που σχηματίζουν των προσκείμενων πλευρών της γωνιάς $\hat{A}$ προς το άθροιστά των πλευρών αυτών.

Πίστη Θα δοχθεί ότι $(AD) = \frac{(AB) \cdot (A\Gamma)}{(AB) + (A\Gamma)}$.

Θεωρούμε τον περιγεγραμμένο κύκλο στο τρίγωνο $AB\Gamma$.
Έστω E το σημείο τομής της προέκτασης της διχοτόμου AD .

Ε μέσον του $\widehat{B\Gamma} \Rightarrow B\hat{E}\Gamma$ ισόπλευρο.

$B\hat{\Delta}E \approx A\hat{\Delta}\Gamma$ ($\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ - κατά κορυφών γωνίες, $\hat{E}_1 = \hat{\Gamma}_1$ - βαίνουν στο ίδιο τόξο)



$$\Rightarrow \frac{(B\Delta)}{(A\Delta)} = \frac{(BE)}{(A\Gamma)} \Rightarrow (A\Delta) = \frac{(B\Delta)}{(BE)} \cdot (A\Gamma)$$

$$\Rightarrow \boxed{(A\Delta) = \frac{(B\Delta)}{(B\Gamma)} \cdot (A\Gamma)} \quad (1)$$

Από το θεωρήμα συνεκτιμήσ διχοτόμου στο $AB\Gamma$:

$$\frac{(AB)}{(A\Gamma)} = \frac{(B\Delta)}{(A\Gamma)} \Rightarrow \frac{(A\Gamma)}{(AB)} = \frac{(A\Gamma)}{(B\Delta)} \Rightarrow \frac{(A\Gamma) + (AB)}{(AB)} = \frac{(A\Gamma) + (B\Delta)}{(B\Delta)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{(A\Gamma) + (AB)}{(AB)} = \frac{(B\Gamma)}{(B\Delta)}} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow (A\Delta) = \frac{(AB) \cdot (A\Gamma)}{(AB) + (A\Gamma)} //$$

Άσκηση 6 (ζανά)

Να δοθεί ότι σε τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $\hat{A} = 120^\circ$, το μήκος της διχοτόμου AD είναι ίσο με το λόγο του διωγμένου των προσκείμενων πλευρών ως συνάρτηση $\hat{A}$ προς το άθροισμα των πλευρών αυτών...

Λύση

Θεωρώ τον περιγεγραμμένο στο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ κύκλο (αναφορά στο σχήμα δίπλα). Θα δείξω

ότι
$$(AD) = \frac{(AB) \cdot (\Gamma\Gamma)}{(AB) + (\Gamma\Gamma)}.$$

Θεωρώ τα συγγενή διχοτόμου

στο $\triangle AB\Gamma$:
$$\frac{(AB)}{(\Gamma\Gamma)} = \frac{(BD)}{(\Delta\Gamma)}$$

$$\Rightarrow \frac{(AB) + (\Gamma\Gamma)}{(\Gamma\Gamma)} = \frac{(BD) + (\Delta\Gamma)}{(\Delta\Gamma)} = \frac{(\beta\Gamma)}{(\Delta\Gamma)}$$

$$\Rightarrow \frac{(AB) + (\Gamma\Gamma)}{(\Gamma\Gamma)} = \frac{(\beta\Gamma)}{(\Delta\Gamma)} \quad (1)$$

Συγγενή τα τρίγωνα $\triangle BE\Gamma$ και $\triangle B\Delta A$:

$$\beta\hat{A}\Delta = 60^\circ = \beta\hat{\Gamma}E \quad (\text{βρίσκω στο ίδιο τόξο})$$

$$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 \quad (\text{παρακείμενες γωνίες})$$

Δοκιμή $\triangle BE\Gamma \sim \triangle B\Delta A$

$$\Rightarrow \triangle BE\Gamma \sim \triangle B\Delta A \Rightarrow \frac{(AD)}{(\Delta\Gamma)} = \frac{(AB)}{(\beta\Gamma)} = \frac{(AB)}{(\beta\Gamma)}$$

$$\Rightarrow (AD) = \frac{(\Delta\Gamma)}{(\beta\Gamma)} (AB) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow (AD) = \frac{(AB) \cdot (\Gamma\Gamma)}{(AB) + (\Gamma\Gamma)} //$$

