Προτεινόμενη λύση Άσκησης 3 (διορίσιμοι 2021).
(α) Ο μαθητής/τρια έδωσε 'λάθος' συνάρτηση (αν η διαδικασία που ακολούθησε μπορεί να χαρακτηριστεί 'σωστή' ή 'λάθος'), υπο την έννοια ότι η συνάρτηση που βρήκε ικανοποιεί τη συνθήκη

$$xf(x) = f(x) + 2 - \sqrt{3x^2+1},$$

αλλά δεν ορίζεται για $x = 1$ (πόσο μάλλον συνεχής στο σημείο αυτό).

(β) Υπολογίζουμε το

$$\lim_{x\to 1} \frac{2-\sqrt{3x^2+1}}{x-1}$$

το οποίο αποτελεί απροσδιοριστία τύπου 0/0.

1ος τρόπος (με συζυγή παράσταση)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{2-\sqrt{3x^2+1}}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(2-\sqrt{3x^2+1})\cdot(2+\sqrt{3x^2+1})}{(x-1)\cdot(2+\sqrt{3x^2+1})} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{4-(3x^2+1)}{(x-1)\cdot(2+\sqrt{3x^2+1})} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{3(1-x^2)}{(x-1)\cdot(2+\sqrt{3x^2+1})} \\
&= -3\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(2+\sqrt{3x^2+1})} \\
&= -3\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{2+\sqrt{3x^2+1}} \\
&= -\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

2ος τρόπος (με χρήση κανόνα του de L Hopital)

$$\lim_{x\to 1} \frac{(2-\sqrt{3x^2+1})'}{(x-1)'} = -\lim_{x\to 1} \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}} = -\frac{3}{2}$$

και άρα, από κανόνα του de L Hopital,

$$\lim_{x\to 1} \frac{2-\sqrt{3x^2+1}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(2-\sqrt{3x^2+1})'}{(x-1)'} = -\frac{3}{2}.$$

Τώρα, θεωρούμε τη συνάρτηση $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{2-\sqrt{3x^2+1}}{x-1} & x \neq 1 \\ -\frac{3}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

δηλαδή τη **συνεχή επέκταση** της $f(x) = \frac{2-\sqrt{3x^2+1}}{x-1}$ στο σημείο $x = 1$.
Η $\tilde{f}$ ικανοποιεί τη δοθείσα συνθήκη και είναι (παντού) συνεχής στο $D(\tilde{f}) = \mathbb{R}$. Λόγω συνέχειας της f, είναι τότε $\tilde{f} = f$. ■