Ερώτηση 10 (2019)

(**10.1.**) Εδώ (τουλάχιστον ένας Μαθηματικός που έχει τελειώσει σε τμήμα που εστιάζει στα Καθαρά Μαθηματικά) μπαίνει κανείς στον πειρασμό να δώσει μια αυστηρή (με τον $\epsilon-$ορισμό του ορίου ακολουθίας) απόδειξη η οποία βέβαια εγγυάται πως δεν θα υπάρχουν ασάφειες.

Έστω $\epsilon > 0$. Αφού $\lim_n b_n = a$, τότε υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|b_n - a| < \frac{\epsilon}{2}, \ \forall n \geq n_1$, δηλαδή

$$|b_n| < \frac{\epsilon}{2} + |a|, \ \forall n \geq n_1.$$

Αφού $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1$, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| < \frac{\epsilon}{\epsilon + 2|a|}, \ \forall n \geq n_2.$$

Θέτουμε $N = \max\{n_1, n_2\}$. Τότε

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= \left|\frac{a_n}{b_n} b_n - b_n + b_n - a\right| \\ &\leq |b_n| \cdot \left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| + |b_n - a| \\ &< \left(\frac{\epsilon}{2} + |a|\right) \frac{\epsilon}{\epsilon + 2|a|} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

$\forall \ n \geq N$. Άρα,

$$\lim_n a_n = a.$$

Εναλλακτικά, αφού η ακολουθία $(b_n)_n$ είναι συγκλίνουσα, είναι και φραγμένη, υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $|b_n| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Ακολούθως, προχωράμε όπως πιο πάνω. ◀

(**10.2.1**) Εδώ τα πράγματα είναι εύκολα:

$$\lim_n n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Αλλά,

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^1 = e$$

και λόγω της συνέχειας της συνάρτησης $x \mapsto (1 + x), \ x > -1$ (εδώ βέβαια θέλουμε συνέχεια για $x > 0$), το όριο μπαίνει εντός:

$$\lim_n n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \ln e = 1.$$

◀

(**10.2.2**) Μια μικρή παρατήρηση πρώτα. Δίπλα από το όριο δίνεται ότι $''x \in (0, +\infty)''$ το οποίο δεν έχει νόημα, αφού μιλάμε για όριο **συνάρτησης**.

Το ερώτημα απαντάται με μια απλή εφαρμογή του **κριτηρίου της παρεμβολής**. Η λύση ενός έμπειρου Μαθηματικού δίνεται ως εξής (για $x \neq 0$):

$$0 \leftarrow 0 \leq \left|\frac{\sin(2x)}{x}\right| = \frac{|\sin(2x)|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \to 0$$

με τα πιο πάνω όρια καθώς $x \to +\infty$. Άρα,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(2x)}{x} = 0.$$

(**10.2.2**) Αυτό το όριο δεν έχει ουδεμία σχέση με τα όρια που διδάσκονται στη Μ.Ε., αφού χρησιμοποιεί το ότι αν $a > 0$, τότε $\lim\limits_n \sqrt[n]{a} = 1$, ένα Λήμμα που **δεν το έχω βρεί πουθενά στους Δείκτες επάρκειας και επιτυχίας**.
Κλασική άσκηση, λύνεται με δύο τρόπους:
Είναι για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$6^n \leq 2^n + 4^n + 6^n \leq 6^n + 6^n + 6^n = 3 \cdot 6^n$$

και αρα

$$6 \leq \sqrt[n]{2^n + 4^n + 6^n} \leq 6 \cdot \sqrt[n]{3}$$

και αφού $\sqrt[n]{3} \to 1$, από το κριτήριο ισοσυγκλινουσών,

$$\lim_n \sqrt[n]{2^n + 4^n + 6^n} = 6.$$

Διαφορετικά,

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{2^n + 4^n + 6^n} &= \sqrt[n]{6^n \left[\left(\frac{3}{6}\right)^n + \left(\frac{4}{6}\right)^n + 1\right]} = 6\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} \\ &= 6(1 + 0 + 0) = 6\end{aligned}$$

αφού $\lim\limits_n (1/2)^n = 0 = \lim\limits_n (2/3)^n$.

Γενικά, ισχύει το εξής:

► Έστω $a, b > 0$. Τότε

$$\lim_n \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}.$$

Λύση Αν $a > b \Rightarrow 0 < \frac{b}{a} < 1$, τότε

$$\lim_n \left(\frac{b}{a}\right)^n = 0$$

και αρα

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} = \sqrt[n]{a^n \left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n\right)} = a\sqrt[n]{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n} \to a \cdot 1 = a = \max\{a, b\}.$$

Αν $a < b \Rightarrow 0 < \frac{a}{b} < 1$, τότε

$$\lim_n \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0$$

και αρα

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} = \sqrt[n]{b^n \left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^n\right)} = b\sqrt[n]{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^n} \to b \cdot 1 = b = \max\{a, b\}.$$

Αν $a = b$, τότε

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} = \sqrt[n]{2a^n} = a\sqrt[n]{2} \to a \cdot 1 = a = \max\{a, b\}.$$