Μέρος Β

Β1

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}.$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής της με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης και να την παραστήσετε γραφικά.

Απάντηση

• Εύρεση πεδίου ορισμού $D(f)$ της f :
Η συνάρτηση f είναι **ρητή**. Συνεπώς,

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\} = \mathbb{R} - \{2\}.$$

• Εύρεση σημείων τομής με τους άξονες των συντεταγμένων:
$f(0) = \frac{0^2+0-2}{0-2} = 1$ και άρα το σημείο τομής με τον άξονα των τεταγμένων είναι το $(0, 1)$.
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x = -2) \vee (x = 1)$ και άρα τα σημεία τομής με τον άξονα των τετμημένων είναι τα $(-2, 0)$ και $(1, 0)$.

• Εύρεση διαστημάτων μονοτονίας και ακρότατων τιμών:
Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της: για $x \neq 2$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2 + x - 2)'(x - 2) - (x - 2)'(x^2 + x - 2)}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{(2x + 1)(x - 2) - (x^2 + x - 2)}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 4x + x - 2 - x^2 - x + 2}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{x^2 - 4x}{(x - 2)^2} = \frac{x(x - 4)}{(x - 2)^2}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 0) \vee (x = 4)$. Τα **κρίσιμα σημεία** της f είναι τα $x = 0, 2, 4$.
Κάνουμε τον πίνακα μεταβολών της f :

x	$-\infty$		0		$2''$		4		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	1	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	9	$\nearrow$	

$\forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα,
$\forall x \in (0, 2) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα,
$\forall x \in (2, 4) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα,
$\forall x \in (4, +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα.
Αφού $f'(0) = 0$ και από το πιο πάνω, έπεται ότι στο σημείο $(0, f(0)) = (0, 1)$ η γρ. παράσταση της f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και αφού $f'(4) = 0$ και από το πιο πάνω, έπεται ότι στο σημείο $(4, f(4)) = (4, 9)$ η γρ. παράσταση της f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

• Έλεγχος ύπαρξης ασυμπτώτων

Ελέγχουμε τη συμπεριφορά της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x - 2} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

και

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x - 2} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty.$$

Τώρα,

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 2} = \left(\lim_{x \to 2-} (x^2 + x - 2) \right) \cdot \left(\lim_{x \to 2-} \frac{1}{x - 2} \right) = 4 \cdot (-\infty) = -\infty,$$

αφού $x \in (0, 2) \Rightarrow x - 2 < 0$ και

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 2} = \left(\lim_{x \to 2+} (x^2 + x - 2) \right) \cdot \left(\lim_{x \to 2+} \frac{1}{x - 2} \right) = 4 \cdot (+\infty) = +\infty,$$

αφού $x \in (2, 4) \Rightarrow x - 2 > 0$.
Άρα, η ευθεία με εξίσωση $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f αριστερά και δεξιά του $x = 2$.

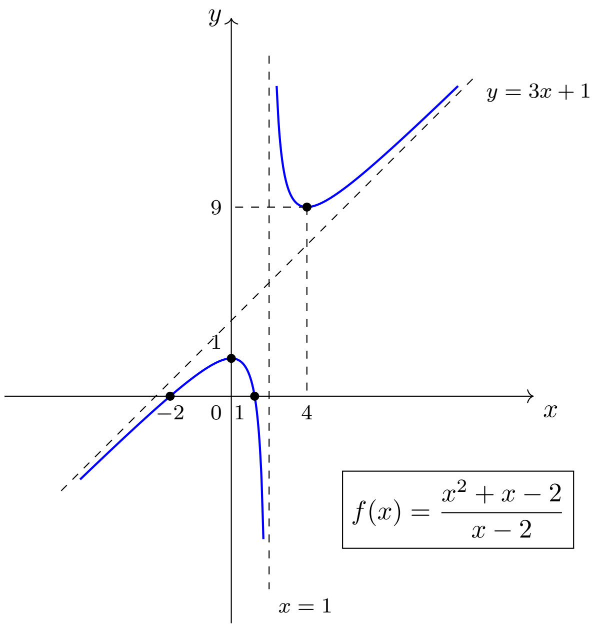
Ο βαθμός του αριθμητή είναι κατά ένα μικρότερος του βαθμού του παρονομαστή, άρα η γραφική παράσταση της f έχει πλάγια ασύμπτωτη, την εξίσωση της οποία θα προσδιορίσουμε:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x(x - 2)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x} = 1$$

και

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 1 \cdot x] = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + x - 2}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x - 2}{x - 2} = 3.$$

Άρα, η ευθεία με εξίσωση $y = x + 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$. Εντελώς όμοια βρίσκουμε ότι η ίδια ευθεία είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$.



B2

Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2=4$ και σημείο του P στο πρώτο τεταρτημόριο. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο P η οποία τέμνει τους άξονες O_x και O_y στα σημεία A και B αντίστοιχα.
Να βρείτε:

(α΄) Την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο P.

(β΄) Την τετμημένη του σημείου P ώστε το τρίγωνο OAB που σχηματίζεται από την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο P και τους άξονες των συντεταγμένων O_x και O_y να έχει το ελάχιστο δυνατό εμβαδόν.

(γ΄) Το ελάχιστο δυνατό εμβαδόν του τριγώνου OAB.

Απάντηση

$(C):\ x^2+y^2=4 \Rightarrow\ K(0,0)$ και $R=2$.
Θα επιλύσουμε την άσκηση με χρήση παραμετρικών εξισώσεων του κύκλου:

$$\begin{cases} x(t)=2\text{συν}t \\ y(t)=2\text{ημ}t \end{cases}, \quad t\in[0,2\pi).$$

Τότε, $P(2\text{συν}t, 2\text{ημ}t)$, όπου $t\in(0,\pi/2)$, αφού το P βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο.

(α΄) Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα την εξίσωση του κύκλου:

$$x^2+y^2=4 \Rightarrow 2x+2yy'=0 \Rightarrow y'=-\frac{x}{y} \quad (y\neq 0).$$

Άρα,

$$\lambda_{\text{εφ.}}=\frac{dy}{dx}\Big|_P=-\frac{\text{συν}t}{\text{ημ}t}.$$

Έτσι, η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο P είναι

$$\begin{aligned} y-y_P=\lambda_{\text{εφ.}}(x-x_P) &\Leftrightarrow y-2\text{ημ}t=-\frac{\text{συν}t}{\text{ημ}t}(x-2\text{συν}t) \\ &\Leftrightarrow (\text{ημ}t)y-2\text{ημ}^2t=-(\text{συν}t)x+2\text{συν}^2t \\ &\Leftrightarrow (\text{ημ}t)y+(\text{συν}t)x=2\text{ημ}^2t+2\text{συν}^2t \\ &\Leftrightarrow (\text{ημ}t)y+(\text{συν}t)x=2(\text{ημ}^2t+\text{συν}^2t) \\ &\Leftrightarrow \boxed{(\text{ημ}t)y+(\text{συν}t)x=2}. \end{aligned}$$

(β΄) Βρίσκουμε τα σημεία A και B θέτοντας στην εξίσωση της εφαπτομένης, $y=0$ και $x=0$ αντίστοιχα:

$$A\left(\frac{2}{\text{συν}t},0\right), \qquad B\left(0,\frac{2}{\text{ημ}t}\right).$$

Το εμβαδόν του τριγώνου OAB δίνεται από

$$E(t)=\frac{(OA)(OB)}{2}=\frac{\frac{2}{\text{συν}t}\cdot\frac{2}{\text{ημ}t}}{2}=\frac{4}{2\text{συν}t\text{ημ}t}=\frac{4}{\text{ημ}2t} \quad t\in(0,\pi/2).$$

Αφού $x\in(0,\pi/2)\Rightarrow 0<\text{ημ}2t\leq 1$, η πιο πάνω συνάρτηση ελαχιστοποιείται για την τιμή του t για την οποία $\text{ημ}2t=1$. Είναι

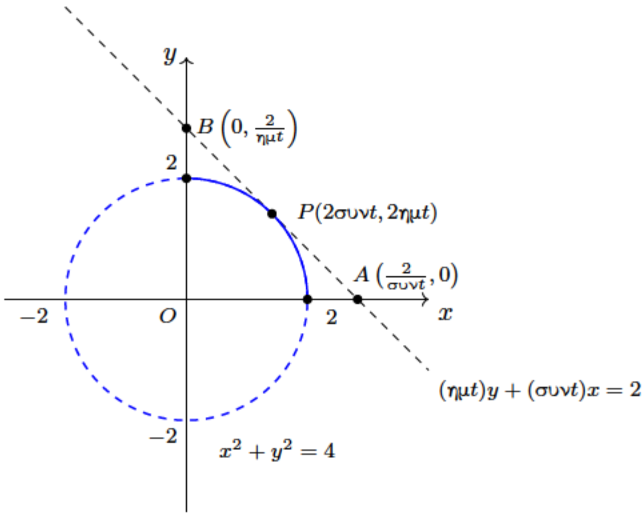
$$\text{ημ}2t=1 \Leftrightarrow \text{ημ}2t=\text{ημ}\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2t=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{4}.$$

Εναλλακτικά, βρίσκουμε

$$E'(t) = -8\cot 2t \cdot \text{στεμ}2t \quad t \in (0, \pi/2).$$

Τότε, $E'(t) = 0 \Leftrightarrow \text{συν}2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}$. Εύκολα βρίσκουμε ότι στο σημείο $t = \frac{\pi}{4}$ η E λαμβάνει ολικό ελάχιστο.

(γ') Από το προηγούμενο ερώτημα, $\text{ημ}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{συν}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και αρα $A(2\sqrt{2}, 0)$, $B(0, 2\sqrt{2})$ και το ελάχιστο εμβαδόν είναι το $E(\frac{\pi}{4}) = 4$.



B3

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$xf''(x) + f'(x) = 4x, \quad \forall x > 0$$

και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(1, f(1))$ έχει εξίσωση $y = 3x - 2$. Να βρείτε:

(α') Τις τιμές $f'(1)$ και $f(1)$.

(β') Τον τύπο της συνάρτησης f.

(γ') Το ολοκλήρωμα $\int e^{f(x)}\, dx$.

Απάντηση

(α') Η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(1, f(1))$ είναι $\lambda = 3$, άρα $\boxed{f'(1) = 3}$. Επίσης, αφού το σημείο M ανήκει στην εφαπτομένη, οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωσή της: $\boxed{f(1) = 3 \cdot 1 - 2 = 1}$.

(β') Έχουμε να λύσουμε το **πρόβλημα αρχικών τιμών**:

$$\begin{cases} xf''(x) + f'(x) = 4x, & x > 0 \\ f'(1) = 3 \\ f(1) = 1 \end{cases}.$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} xf''(x) + f'(x) = 4x \quad &\Leftrightarrow \quad x(f'(x))' + x' \cdot f'(x) = 4x \\ &\Leftrightarrow \quad (xf'(x))' = 4x. \end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε αμφότερα μέλη:

$$\int (xf'(x))'\, dx = 4 \int x\, dx \Rightarrow xf'(x) = 2x^2 + c$$

και αφού $x > 0$,

$$f'(x) = 2x + \frac{c}{x}.$$

Χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη $f'(1) = 3$:

$$3 = 2 \cdot 1 + \frac{c}{1} \Rightarrow c = 1$$

και αρα

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x}.$$

Ολοκληρώνουμε αμφότερα μέλη:

$$\int f'(x)\, dx = \int \left(2x + \frac{1}{x}\right) dx \Rightarrow f(x) = x^2 + \ln x + c_*.$$

Χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη $f(1) = 1$:

$$1 = 1^2 + \ln 1 + c_* \Rightarrow c_* = 0.$$

Άρα,

$$\boxed{f(x) = x^2 + \ln x}\ .$$

(γ') Έχουμε:

$$\begin{aligned} \int e^{f(x)}\, dx \quad &= \quad \int e^{x^2 + \ln x}\, dx \ = \ \int e^{x^2} \cdot e^{\ln x}\, dx \\ &= \quad \int x \cdot e^{x^2}\, dx \ = \ \frac{1}{2} \int e^{x^2}\, (x^2)'\, dx \\ &= \quad \frac{1}{2} e^{x^2} + c. \end{aligned}$$