

**Δραστηριότητες σελ. 97 (Μελέτη-Γραφική παράσταση συνάρτησης)**

1. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα, τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή ή κοίλη, τα σημεία καμπής και τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης, να παραστήσετε γραφικά καθεμία από τις πιο κάτω συναρτήσεις:

(α)  $f(x) = x^3 - 12x$

(β)  $f(x) = (x - 2)^2(x + 1)$

(γ)  $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$

(δ)  $f(x) = \frac{4x}{(x + 1)^2}$

(ε)  $f(x) = \frac{(x - 2)(x + 4)}{x + 1}$

(στ)  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1}$

(ζ)  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

(η)  $f(x) = \frac{x^2}{(x - 1)^2}$

(θ)  $f(x) = xe^x$

(ι)  $f(x) = e^{-x^2}$

(ια)  $f(x) = (x - 1)e^{2x}$

(ιβ)  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

(ιγ)  $f(x) = x^2 \ln x$

(ιδ)  $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

2. Δίνεται η συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = \frac{x + \kappa}{\sqrt{x}} \quad (\kappa \in \mathbb{R})$$

Αν  $f'(1) = -1$ , να βρείτε την τιμή του  $\kappa$ . στη συνέχεια, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f$ .

Δραστηριότητες σελ. 97 (Γραφική Παράσταση Συνάρτησης)

1. (α)  $f(x) = x^3 - 12x$ .

**Πεδίο ορισμού:**  $D(f) = \mathbb{R}$  (ως πολωνυμική συνάρτηση)

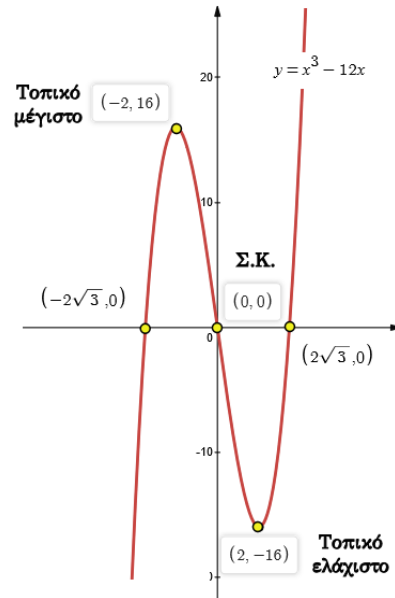
**Εύρεση σημείων τομής με τους άξονες:**  $f(x) = x^3 - 12x = x(x^2 - 12) = x(x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3})$

και άρα  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$ . Επίσης,  $f(0) = 0$ .

**Εύρεση ακροτάτων/σημείων καμψής:** Η συνάρτηση είναι παντού δις-παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4), \forall x \in \mathbb{R}$$

και άρα τα κρίσιμά της σημεία είναι τα  $x = \pm 2$ . Επίσης,  $f''(x) = 6x, \forall x \in \mathbb{R}$ . Συνεπώς, αφού  $f''(2) = -12 < 0$  και  $f''(-2) = 12 > 0$ , από το Κριτήριο της Δευτέρας Παραγώγου, έχουμε ότι η καμπύλη η οποία καθορίζεται από το γράφημα της πιο πάνω συνάρτησης, έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο  $(2, f(2)) = (2, -16)$  και τοπικό μέγιστο στο σημείο  $(-2, f(-2)) = (-2, 16)$ . Τέλος  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  και άρα το σημείο με  $x = 0$  είναι υποψήφιο σημείο καμψής του γραφήματος της συνάρτησης. Όμως, λόγω της συνέχειας της συνάρτησης και επειδή λαμβάνει ένα τοπικό ελάχιστο και ένα τοπικό μέγιστο, το σημείο αυτό θα είναι όντως σημείο καμψής (αλλαγή καμπυλότητας).



**Οριακή συμπεριφορά της συνάρτησης**

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^3 - 12x] = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x^3 - 12x] = -\infty$$

**Παρατήρηση:** Η συνάρτηση είναι περιττή.

(β)  $f(x) = (x - 2)^2(x + 1)$

**Εύρεση Πεδίου Ορισμού**

Είναι  $D(f) = \mathbb{R}$  αφού η συνάρτηση είναι πολωνυμική.

**Εύρεση σημείων τομής με τους άξονες**

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1, 2$ . Επίσης,  $f(0) = 4$ . Έτσι, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων είναι τα  $(-1, 0)$ ,  $(2, 0)$  και  $(0, 4)$

**Μονοτονία της συνάρτησης:** Η συνάρτηση είναι παντού δις-παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = 3x(x - 2), \forall x \in \mathbb{R} \text{ και } f''(x) = 6(x - 1), \forall x \in \mathbb{R}$$

Είναι  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 2$  (κρίσιμα σημεία). Παρατηρούμε ότι

➔  $\forall x \in (-\infty, 0)$  είναι  $f'(x) > 0$  (άρα γνησίως αύξουσα) και  $\forall x \in (0, 2)$  είναι  $f'(x) < 0$  (άρα γνησίως φθίνουσα) και αφού  $f'(0) = 0$ , έπεται από το κριτήριο πρώτης παραγώγου, ότι το γράφημα της συνάρτησης λαμβάνει τοπικό μέγιστο στο σημείο  $(0, f(0)) = (0, 4)$

➔  $\forall x \in (0, 2)$  είναι  $f'(x) < 0$  (άρα γνησίως φθίνουσα) και  $\forall x \in (2, +\infty)$  είναι  $f'(x) > 0$  (άρα γνησίως αύξουσα) και αφού  $f'(2) = 0$ , έπεται από το κριτήριο πρώτης παραγώγου, ότι το γράφημα της συνάρτησης λαμβάνει τοπικό ελάχιστο στο σημείο  $(2, f(2)) = (2, 0)$

**Σημείωση:** αφού έχουμε βρεί τον τύπο της  $f''$ , μπορούμε με τη χρήση του κριτηρίου δευτέρας παραγώγου να βρούμε το είδος του εκάστοτε ακροτάτου.

**Κυρτότητα της συνάρτησης**

Λόγω της ύπαρξης της δευτέρας παραγώγου παντού, το πρόσημό της μας δίνει τον τρόπο που καμπυλώνεται το γράφημα της συνάρτησης. Έχουμε

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Είναι

| $x$  | $-\infty$ | $0$ | $2$ | $+\infty$ |
|------|-----------|-----|-----|-----------|
| $f'$ | +         |     | -   | +         |
| $f$  |           | ↗   | ↘   | ↗         |
|      | max       |     | min |           |

| $x$   | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|-------|-----------|-----|-----------|
| $f''$ | -         |     | +         |
| $f$   | ↘         |     | ↗         |
|       | Σ.Κ.      |     |           |

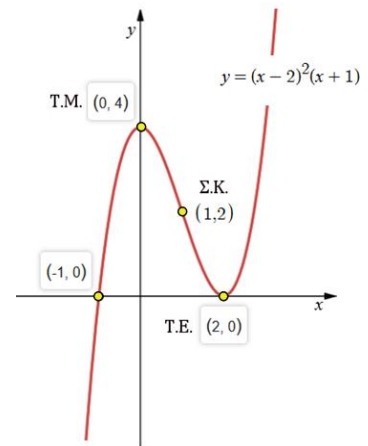
$\forall x \in (-\infty, 1)$  είναι  $f''(x) < 0$  (άρα η συνάρτηση είναι κοίλη, δηλ. στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) και  $\forall x \in (1, +\infty)$  είναι  $f''(x) > 0$  (άρα η συνάρτηση είναι κυρτή, δηλ. στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω) και αφού  $f''(4) = 0$ , έπεται ότι, ότι το γράφημα της συνάρτησης παρουσιάζει καμπή (αλλαγή καμπυλότητας) στο σημείο  $(1, f(1)) = (1, 2)$ .

#### Οριακή συμπεριφορά της συνάρτησης

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

αφού η συνάρτηση είναι πολυωνυμική



(γ)  $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ . Η συνάρτηση είναι **ρητή**

#### Εύρεση Πεδίου Ορισμού

Είναι  $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

#### Εύρεση σημείων τομής με τους άξονες

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ . Επίσης,  $f(0) = -1$ .

Έτσι, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων είναι τα  $(0, -1)$  και  $(-\frac{1}{2}, 0)$ .

**Μονοτονία και κυρτότητα της συνάρτησης:** Η συνάρτηση είναι παντού δις-παραγωγίσιμη στο Πεδίο Ορισμού της με

$$f'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2}, \quad x \in \mathbb{R} - \{1\} \quad \text{και} \quad f''(x) = \frac{6}{(x-1)^3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

Έτσι,  $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$  είναι  $f'(x) < 0$  και άρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το π.ο. της.

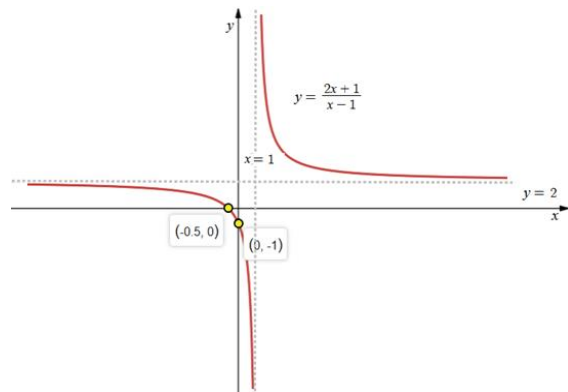
Επίσης,

$\forall x \in (-\infty, 1)$  είναι  $f''(x) < 0$  και άρα η συνάρτηση είναι κοίλη στο διάστημα αυτό (στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) και  $\forall x \in (-1, +\infty)$  είναι  $f''(x) > 0$  και άρα η συνάρτηση είναι κυρτή στο διάστημα αυτό (στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω).

#### Εύρεση ασυμπτώτων

Η συνάρτηση είναι ρητή με το βαθμό του πολωνύμου του αριθμητή να είναι ίσος με το βαθμό του πολωνύμου του παρονομαστή. Άρα, η ευθεία με εξίσωση  $y = \frac{2}{1} = 2$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης. Επίσης, αφού η συνάρτηση έχει **πόλο τάξης 1** για  $x = 1$ , άρα η ευθεία με εξίσωση  $x = 1$  θα είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης. Συγκεκριμένα

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$



(δ)  $f(x) = \frac{4x}{(x+1)^2}$ . Η συνάρτηση είναι **ρητή**

#### Εύρεση Πεδίου Ορισμού

Είναι  $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ .

#### Εύρεση σημείων τομής με τους άξονες

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Έτσι, το σημείο τομής με τους άξονες των συντεταγμένων είναι το  $(0, 0)$ .

#### Μονοτονία της συνάρτησης

Η συνάρτηση είναι παντού δις-παραγωγίσιμη στο Πεδίο Ορισμού της με

$$f'(x) = \frac{4(1-x)}{(x+1)^3}, \quad x \neq -1 \quad \text{και} \quad f''(x) = \frac{8(x-2)}{(x+1)^4}, \quad x \neq -1$$

Είναι  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$  (κρίσιμο σημείο). Παρατηρούμε ότι

➡  $\forall x \in (-\infty, -1)$  είναι  $f'(x) < 0$  (άρα γνησίως φθίνουσα) και  $\forall x \in (-1, 1)$  είναι  $f'(x) > 0$  (άρα γνησίως αύξουσα).

➡  $\forall x \in (0, 1)$  είναι  $f'(x) > 0$  (άρα γνησίως αύξουσα) και  $\forall x \in (1, +\infty)$  είναι  $f'(x) < 0$  (άρα γνησίως φθίνουσα) και αφού  $f'(1) = 0$ , έπεται από το κριτήριο πρώτης παραγώγου, ότι το γράφημα της συνάρτησης λαμβάνει τοπικό μέγιστο στο σημείο  $(1, f(1)) = (1, 1)$ .

### Κυρτότητα της συνάρτησης

►  $\forall x \in (-\infty, -1)$  είναι  $f''(x) < 0$  (άρα η συνάρτηση είναι κοίλη, δηλ. στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω). Το ίδιο στο διάστημα  $(2, +\infty)$

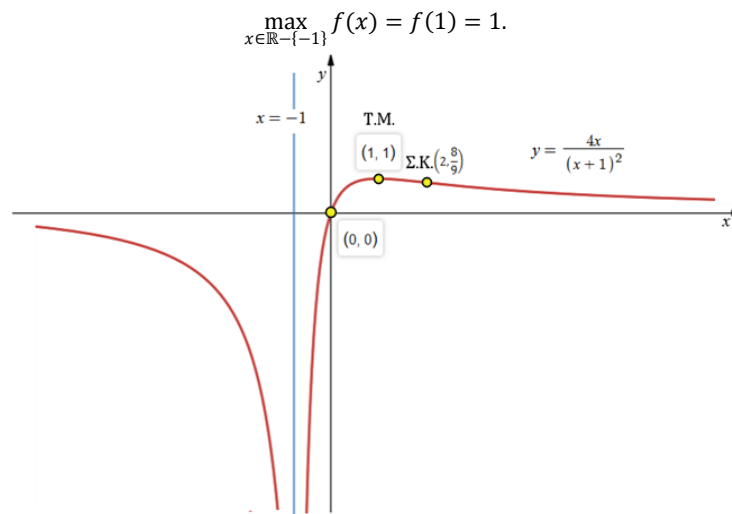
►  $\forall x \in (-1, 2)$  είναι  $f''(x) > 0$  (άρα η συνάρτηση είναι κυρτή, δηλ. στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω).

Έτσι, αφού το γράφημα της συνάρτησης αλλάζει κυρτότητα στο σημείο με  $x = 2$ , τότε έχουμε ότι το σημείο  $(2, f(2)) = (2, \frac{8}{9})$  είναι σημείο καμπής της συνάρτησης.

**Εύρεση ασυμπτώτων:** Η συνάρτηση είναι ρητή με το βαθμό του πολωνύμου του αριθμητή να είναι κατά ένα μικρότερος από το βαθμό του πολωνύμου του παρονομαστή. Αφού η συνάρτηση έχει **πόλο τάξης 1** για  $x = -1$ , άρα η ευθεία με εξίσωση  $x = -1$  θα είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης. Συγκεκριμένα

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

Παρατηρούμε ότι



(ε)  $f(x) = \frac{(x-2)(x+4)}{x+1}$ . Η συνάρτηση είναι **ρητή**

**Εύρεση Πεδίου Ορισμού**

Είναι  $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ .

**Εύρεση σημείων τομής με τους άξονες**

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+4) = 0 \Leftrightarrow x = -4, 2$ . Επίσης  $f(0) = -8$ . Έτσι, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων είναι τα  $(-4, 0)$ ,  $(2, 0)$  και  $(0, -8)$

### Μονοτονία της συνάρτησης

Η συνάρτηση είναι παντού δις-παραγωγίσιμη στο Πεδίο Ορισμού της με

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 10}{(x+1)^2}, x \neq -1 \text{ και } f''(x) = -\frac{18}{(x+1)^3}, x \neq -1$$

Είναι  $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$  και άρα η συνάρτηση γνησίως αύξουσα παντού στο π.ο. της.

### Κυρτότητα της συνάρτησης

$\forall x \in (-\infty, -1)$  είναι  $f''(x) > 0$  (άρα η

| $x$   | $-\infty$                                                                             | $-1$ | $+\infty$                                                                             |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------|------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| $f''$ | +                                                                                     |      | -                                                                                     |
| $f$   |  |      |  |

συνάρτηση είναι κυρτή, δηλ. στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω) και  $\forall x \in (-1, +\infty)$  είναι  $f''(x) < 0$  (άρα η συνάρτηση είναι κοίλη, δηλ. στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω).

**Εύρεση ασυμπτώτων:** Αφού η συνάρτηση είναι ρητή με το βαθμό του πολωνύμου του αριθμητή να είναι κατά ένα μεγαλύτερος από το βαθμό του πολωνύμου του παρονομαστή, εκτελώντας την Ευκλείδεια Διαίρεση  $\frac{(x-2)(x+4)}{x+1}$

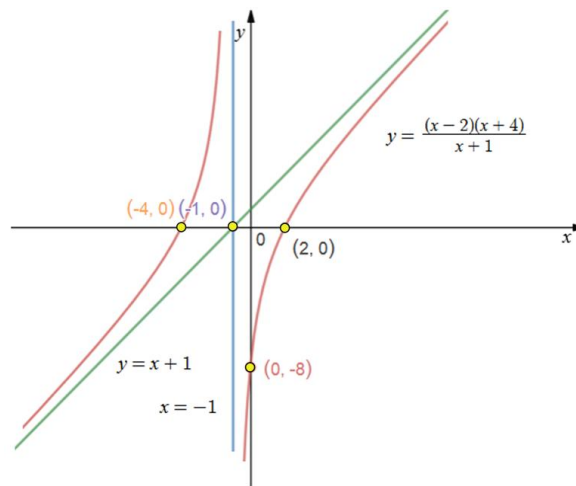
έχουμε:

$$\frac{(x-2)(x+4)}{x+1} = \frac{x^2 + 2x - 8}{x+1} = x + 1 + \frac{7}{x+1}$$

και άρα η ευθεία με εξίσωση  $y = x + 1$  είναι πλάγια ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης καθώς  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Επίσης, αφού η συνάρτηση έχει **ρίζα τάξης 1** για  $x = -1$ , άρα η ευθεία με εξίσωση  $x = -1$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης. Συγκεκριμένα

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$



**(στ)**  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$ . Η συνάρτηση είναι **ρητή**.

**Εύρεση Πεδίου Ορισμού**

Είναι  $D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$

**Εύρεση σημείων τομής με τους άξονες**

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x(x+1)} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ . Έτσι, το σημείο τομής με τους άξονες των συντεταγμένων είναι το  $(-\frac{1}{2}, 0)$ .

**Μονοτονία της συνάρτησης:** Η συνάρτηση είναι παντού δις-παραγωγίσιμη στο Πεδίο Ορισμού της με

$$f'(x) = -\frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2(x+1)^2}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$$

Είναι  $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$  και άρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Πεδίο Ορισμού της.

**Κυρτότητα της συνάρτησης**

$$f''(x) = \frac{2(2x^3 + 3x^2 + 3x + 1)}{x^2(x+1)^2} = \frac{(2x+1)(x^2+x+1)}{x^2(x+1)^2}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$$

Είναι  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ . Έχουμε

$\forall x \in (-\infty, -1)$  είναι  $f''(x) < 0$  (άρα η συνάρτηση είναι κοίλη δηλ. στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω). Το ίδιο στο διάστημα  $(-\frac{1}{2}, 0)$

$\forall x \in (-1, 0)$  είναι  $f''(x) > 0$  (άρα η συνάρτηση είναι κυρτή, δηλ. στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω). Το ίδιο στο διάστημα  $(0, +\infty)$ .

Έτσι, αφού το γράφημα της συνάρτησης αλλάζει κυρτότητα στο σημείο με  $x = -\frac{1}{2}$ , τότε έχουμε ότι το σημείο  $(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2})) = (-\frac{1}{2}, 0)$  είναι σημείο καμπής του γραφήματος της συνάρτησης.

**Εύρεση ασυμπτώτων**

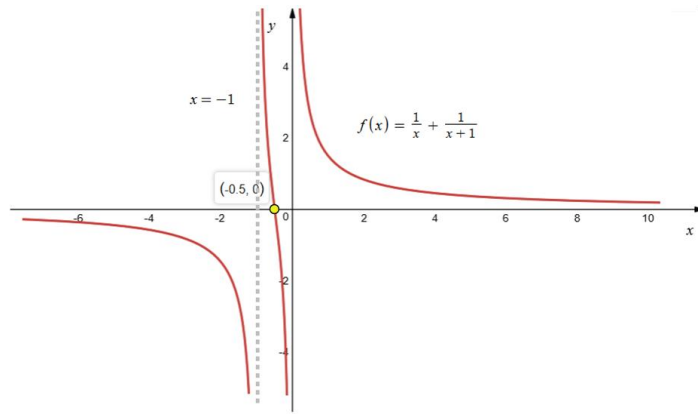
Η συνάρτηση είναι ρητή με το βαθμό του πολωνύμου του αριθμητή να είναι κατά ένα λιγότερος από το βαθμό του πολωνύμου του παρονομαστή (έχει ρίζες τάξης **1 σε κάθε ένα από τα σημεία**  $x = 0$  και  $x = -1$ ). Άρα, οι ευθείες με εξίσωση  $x = -1$  και  $x = 0$  είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες του γραφήματος της συνάρτησης. Συγκεκριμένα

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

και άρα ο άξονας των τετμημένων είναι οριζόντια ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης καθώς  $x \rightarrow \pm\infty$ .



(ζ)  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2}$ . Η συνάρτηση είναι **ρητή**.

#### Εύρεση Πεδίου Ορισμού

Είναι  $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

#### Εύρεση σημείων τομής με τους άξονες

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = -1$ . Έτσι, το σημείο τομής με τους άξονες των συντεταγμένων είναι το  $(-1, 0)$ .

#### Μονοτονία της συνάρτησης

Η συνάρτηση είναι παντού δις-παραγωγίσιμη στο Πεδίο Ορισμού της με

$$f'(x) = -\frac{x+2}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R}_*$$

Είναι  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$  (κρίσιμο σημείο). Έχουμε:

$\forall x \in (-2, 0)$  είναι  $f'(x) > 0$  και άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό και λόγω της συνέχειας της συνάρτησης στο σημείο  $x = -2$ , έχουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[-2, 0)$ .

$\forall x \in (-\infty, -2)$  είναι  $f'(x) < 0$  και άρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα και λόγω της συνέχειας της συνάρτησης στο σημείο  $x = -2$ , έχουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(-\infty, -2]$ . Ομοίως, δείχνουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(0, +\infty)$ .

Έτσι, από το κριτήριο πρώτης παραγώγου, έχουμε ότι στο σημείο  $(-2, f(-2)) = (-2, -\frac{1}{4})$  έχουμε τοπικό ελάχιστο.

#### Κυρτότητα της συνάρτησης

$$f''(x) = 2\frac{x+3}{x^4}, \quad x \in \mathbb{R}_*$$

Είναι  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ . Έχουμε

$\forall x \in (-\infty, -3)$  είναι  $f''(x) < 0$  (άρα η συνάρτηση είναι κοίλη δηλ. στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω). Λόγω της συνέχειας στο σημείο  $x = -3$ , έχουμε ότι η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο  $(-\infty, -3]$ .

$\forall x \in (-3, 0)$  είναι  $f''(x) > 0$  (άρα η συνάρτηση είναι κυρτή, δηλ. στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω). Το ίδιο στο διάστημα  $(0, +\infty)$ . Λόγω της συνέχειας στο σημείο  $x = -3$ , έχουμε ότι η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο διάστημα  $[-3, 0)$ .

Έτσι, αφού το γράφημα της συνάρτησης αλλάζει κυρτότητα στο σημείο με  $x = -3$ , τότε έχουμε ότι το σημείο  $(-3, f(-3)) = (-3, 0.22)$  είναι σημείο καμπής της συνάρτησης.

#### Εύρεση ασυμπτώτων

Η συνάρτηση είναι ρητή με το βαθμό του πολωνύμου του αριθμητή να είναι κατα ένα λιγότερος από το βαθμό του πολωνύμου του παρονομαστή. Άρα, ο άξονας των τεταγμένων είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης. Συγκεκριμένα

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

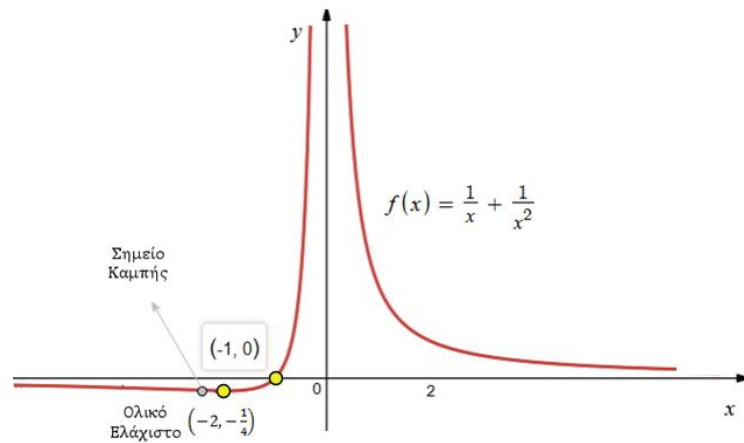
και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

και έτσι, ο άξονας των τεταγμένων είναι οριζόντια ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης. Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

και άρα ο άξονας των τεταγμένων είναι οριζόντια ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης καθώς  $x \rightarrow \pm\infty$



(η)  $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$ . Η συνάρτηση είναι **ρητή**. Είναι  $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$ .

### Μονοτονία της συνάρτησης

Η συνάρτηση είναι παντού δις-παραγωγίσιμη στο Πεδίο Ορισμού της με

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x-1)^3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

Είναι  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (κρίσιμο σημείο). Παρατηρούμε ότι

$\forall x \in (-\infty, 0)$  είναι  $f'(x) < 0$  και αρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα και λόγω της συνέχειας της συνάρτησης στο σημείο  $x = 0$ , έχουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(-\infty, 0]$ . Ομοίως, δείχνουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[1, +\infty)$ .

$\forall x \in (0, 1)$  είναι  $f'(x) > 0$  και αρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό και λόγω της συνέχειας της συνάρτησης στο σημείο  $x = 0$  και στο  $x = 1$ , έχουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[0, 1)$ .

Έτσι, αφού  $f'(0) = 0$ , από το κριτήριο πρώτης παραγώγου, έχουμε ότι στο σημείο  $(0, f(0)) = (0, 0)$  έχουμε **τοπικό ελάχιστο**.

### Κυρτότητα της συνάρτησης

Είναι  $f''(x) = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}$ ,  $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ . Επίσης,  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ . Παρατηρούμε ότι  $\forall x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$  είναι  $f''(x) < 0$  και αρα η συνάρτηση είναι κοίλη στο διάστημα αυτό (στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) και  $\forall x \in (-\frac{1}{2}, 1)$  και  $\forall x \in (1, +\infty)$  είναι  $f''(x) > 0$  και αρα η συνάρτηση είναι κυρτή σε κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά (στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω). Άρα, αφού  $f'' = 0$ , έπεται ότι το γράφημα της συνάρτησης αλλάζει κυρτότητα στο σημείο με  $x = -\frac{1}{2}$  και έχουμε ότι το σημείο  $(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2})) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{9})$  είναι σημείο καμπής της συνάρτησης.

### Εύρεση ασυμπτώτων

Για  $x > 0$ , η συνάρτηση είναι ρητή με το βαθμό του πολυωνύμου του αριθμητή να είναι να είναι ίσος με το βαθμό του πολυωνύμου του παρονομαστή. Η συνάρτηση έχει πόλο τάξης 2 στο σημείο  $x = 1$ . Άρα, ο άξονας των τεταγμένων είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης. Συγκεκριμένα

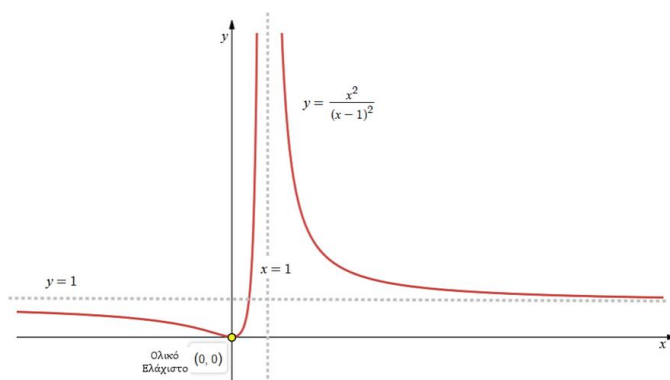
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

λόγω του ότι η τάξη του πόλου είναι άρτια. Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

και αρα η ευθεία με εξίσωση  $y = 1$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης καθώς  $x \rightarrow \pm\infty$ . Τέλος, έχουμε ότι

$$\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(0) = 0$$



$$(θ) f(x) = xe^x.$$

### Εύρεση Πεδίου Ορισμού

$$\text{Είναι } D(f) = \mathbb{R}$$

### Εύρεση σημείων τομής με τους άξονες

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Έτσι, το σημείο τομής με τους άξονες των συντεταγμένων είναι το  $(0,0)$ .

### Μονοτονία της συνάρτησης

Η συνάρτηση είναι παντού δις-παραγωγίσιμη στο Πεδίο Ορισμού της με

$$f'(x) = (x+1)e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ και } f''(x) = (x+2)e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Είναι  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ . Έχουμε ότι

$\forall x \in (-\infty, -1)$  είναι  $f'(x) < 0$  και άρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό ενώ  $\forall x \in (-1, +\infty)$  είναι  $f'(x) > 0$  και άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Έτσι, αφού  $f'(-1) = 0$ , έπεται από το κριτήριο πρώτης παραγώγου ότι το γράφημα της συνάρτησης παρουσιάζει Τοπικό Ελάχιστο στο σημείο  $(-1, f(-1)) = (-1, -\frac{1}{e})$ .

**Κυρτότητα της συνάρτησης:** Είναι  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ . Έχουμε ότι

$\forall x \in (-\infty, -2)$  είναι  $f''(x) < 0$  (άρα η συνάρτηση είναι, κοίλη δηλ. στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω). Λόγω της συνέχειας της συνάρτησης και στο  $x = -2$ , έχουμε ότι η  $f$  είναι κοίλη στο διάστημα  $(-\infty, -2]$ .  $\forall x \in (-2, +\infty)$  είναι  $f''(x) > 0$  (άρα η συνάρτηση είναι κυρτή, δηλ. στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω). Λόγω της συνέχειας της συνάρτησης και στο  $x = -2$ , έχουμε ότι η  $f$  είναι κυρτή στο διάστημα  $[-2, +\infty)$ . Έτσι, αφού το γράφημα της συνάρτησης αλλάζει κυρτότητα στο σημείο με  $x = -2$ , έχουμε ότι το σημείο  $(-2, f(-2)) = (-2, -\frac{2}{e^2})$  είναι σημείο καμπής του γραφήματος της συνάρτησης.

Πίνακας μεταβολών της  $f''$ :

| $x$   | $-\infty$ | $-2$               | $+\infty$         |
|-------|-----------|--------------------|-------------------|
| $f''$ |           | $-$                | $+$               |
| $f$   |           | $\curvearrowright$ | $\curvearrowleft$ |
|       | Σ.Κ.      |                    |                   |

### Εύρεση ασυμπτώτων

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$$

και άρα ο άξονας των τετμημένων είναι οριζόντια ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης καθώς  $x \rightarrow -\infty$ .

Για το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x$$

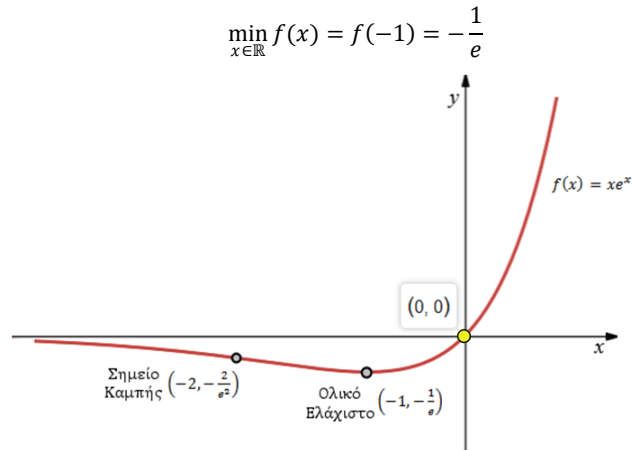
έχουμε ότι αποτελεί Α.Μ. τύπου  $(-\infty) \cdot 0$ . Γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}}$$

το οποίο αποτελεί Α.Μ. τύπου  $\frac{-\infty}{+\infty}$  και άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$$

Επίσης, το σημείο τοπικού ελαχίστου είναι και σημείο ολικού ελαχίστου:



(ι)  $f(x) = e^{-x^2}$ . Η συνάρτηση είναι **άρτια**. Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι  $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ . Επίσης,  $\forall x \in \mathbb{R}$  είναι  $f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$ .

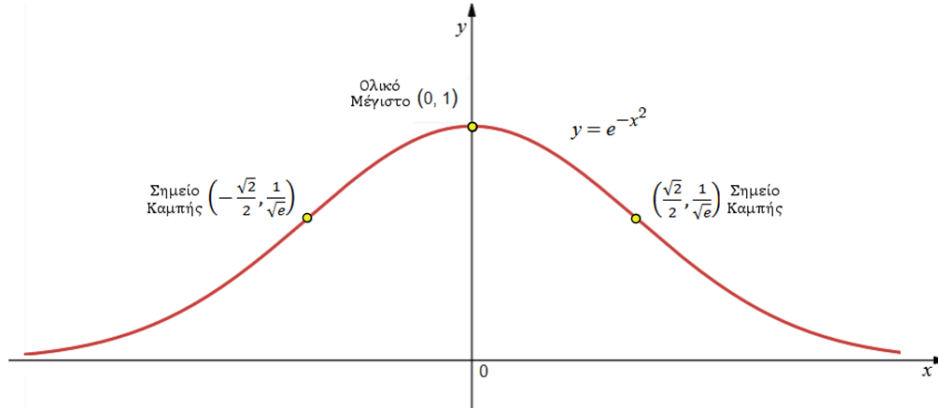
Έτσι,  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$   
 Έτσι, η  $f$  είναι κυρτή στα διαστήματα στο  $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$  και  $[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$  και κοίλη στο διάστημα  $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$  ενώ έχει Σ.Κ. τα  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, f(\frac{\sqrt{2}}{2})) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}})$  και  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, f(-\frac{\sqrt{2}}{2})) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}})$ . Το ότι  $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = f(-\frac{\sqrt{2}}{2})$  είναι αναμενόμενο αφού η συνάρτηση είναι άρτια.

|       | $-\infty$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$                                                               | $+\frac{\sqrt{2}}{2}$                                                               | $+\infty$                                                                           |
|-------|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $f''$ |           | +                                                                                   | -                                                                                   | +                                                                                   |
| $f$   |           |  |  |  |
|       |           | ΣΚ                                                                                  | ΣΚ                                                                                  |                                                                                     |

**Παρατήρηση:** Με κατάλληλες μεταφορές και διαθλάσεις, μπορούμε να κατασκευάσουμε από το γράφημα της συνάρτησης αυτής, συνάρτηση της μορφής

$$f(x) = \alpha e^{-\left(\frac{x-b}{\sqrt{2}c}\right)^2}$$

όπου  $\alpha, b, c$  πραγματικές σταθερές,  $\alpha \neq 0$ . Η συνάρτηση αυτή λέγεται **η συνάρτηση του Gauss**.



(ια)  $f(x) = (x-1)e^{2x}$ .

**Εύρεση Πεδίου Ορισμού**

Είναι  $D(f) = \mathbb{R}$

**Εύρεση σημείων τομής με τους άξονες**

$\Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$  και  $f(0)=-1$ . Έτσι, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων είναι τα  $(1,0)$  και  $(0,-1)$ .

**Μονοτονία της συνάρτησης:** Η συνάρτηση είναι παντού δις-παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = (2x-1)e^{2x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ και } f''(x) = 4xe^{2x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Είναι  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ . Έχουμε ότι

$\forall x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  είναι  $f'(x) < 0$  και άρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό ενώ  $\forall x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$  είναι  $f'(x) > 0$  και άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Έτσι, αφού

$f'(\frac{1}{2}) = 0$ , έπεται από το κριτήριο πρώτης παραγώγου ότι το γράφημα της συνάρτησης παρουσιάζει Τοπικό Μέγιστο στο σημείο

$$\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{e}{2}\right).$$

**Κυρτότητα της συνάρτησης:** Είναι  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Έχουμε ότι

►  $\forall x \in (-\infty, 0)$   $f''(x) < 0$  (άρα η συνάρτηση είναι, κοίλη δηλ. στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω). Λόγω της συνέχειας της συνάρτησης και στο  $x = 0$ , έχουμε ότι η  $f$  είναι κοίλη στο διάστημα  $(-\infty, 0]$ .

►  $\forall x \in (0, +\infty)$  είναι  $f''(x) < 0$  (άρα η συνάρτηση είναι κυρτή, δηλ. στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω). Λόγω της συνέχειας της συνάρτησης και στο  $x = 0$ , έχουμε ότι η  $f$  είναι κοίλη στο διάστημα  $[0, +\infty)$ .

Έτσι, αφού το γράφημα της συνάρτησης αλλάζει κυρτότητα στο σημείο με  $x = 0$ , έχουμε ότι το σημείο  $(0, f(0)) = (0, -1)$  είναι σημείο καμπής του γραφήματος της συνάρτησης.

### Εύρεση ασυμπτώτων

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{2x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^{2x} = +\infty$$

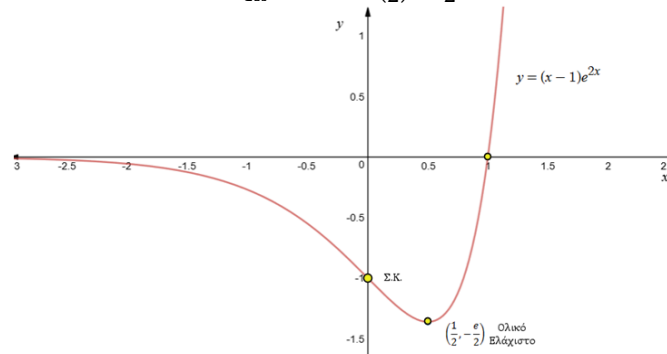
και αρα ο άξονας των τετμημένων είναι οριζόντια ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης καθώς  $x \rightarrow -\infty$ . Για το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{2x}$$

εφαρμόζουμε τον κανόνα του DLH.

**Παρατήρηση:** Το σημείο τοπικού ελαχίστου είναι και σημείο ολικού ελαχίστου:

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$



$$(ιβ) f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

### Εύρεση Πεδίου Ορισμού

Είναι  $D(f) = (0, +\infty)$

### Εύρεση σημείων τομής με τους άξονες

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ . Έτσι, το σημείο τομής με τους άξονες των συντεταγμένων είναι το  $(1, 0)$ .

### Μονοτονία της συνάρτησης

Η συνάρτηση είναι συνεχής και δις παραγωγίσιμη στο π.ο. της με

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \quad \text{και} \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$$

Είναι  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$ . Έχουμε ότι

$\forall x \in (-\infty, e)$  είναι  $f'(x) > 0$  και αρα η συνάρτηση είναι γνησίως στο αύξουσα διάστημα αυτό ενώ  $\forall x \in (e, +\infty)$  είναι  $f'(x) < 0$  και αρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Έτσι, αφού  $f'(-1) = 0$ , έπεται από το κριτήριο πρώτης παραγώγου ότι το γράφημα της συνάρτησης παρουσιάζει Τοπικό Μέγιστο στο σημείο  $(e, f(e)) = (e, \frac{1}{e})$ .

**Κυρτότητα της συνάρτησης:** Είναι  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$ . Έχουμε ότι

$\forall x \in (-\infty, e^{\frac{3}{2}})$  είναι  $f''(x) > 0$  (άρα η συνάρτηση είναι, δηλ. στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω). Λόγω της συνέχειας της συνάρτησης και στο  $x = e^{\frac{3}{2}}$ , έχουμε ότι η  $f$  είναι κυρτή στο διάστημα  $(-\infty, e^{\frac{3}{2}}]$ .

$\forall x \in (e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$  είναι  $f''(x) < 0$  (άρα η συνάρτηση είναι κοίλη δηλ. στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω). Λόγω της συνέχειας της συνάρτησης και στο  $x = e^{\frac{3}{2}}$ , έχουμε ότι η  $f$  είναι κοίλη στο διάστημα  $[e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$ .

Έτσι, αφού το γράφημα της συνάρτησης αλλάζει κυρτότητα στο σημείο με  $x = e^{\frac{3}{2}}$ , έχουμε ότι το σημείο  $\left(e^{\frac{3}{2}}, f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\right) = \left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$  είναι σημείο καμπής του γραφήματος της συνάρτησης.

| $x$   | $-\infty$                                                                         | $e^{\frac{3}{2}}$ | $+\infty$                                                                         |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| $f''$ | $-$                                                                               | $\circ$           | $+$                                                                               |
| $f$   |  |                   |  |
|       | Σ.Κ.                                                                              |                   |                                                                                   |

### Εύρεση ασυμπτώτων

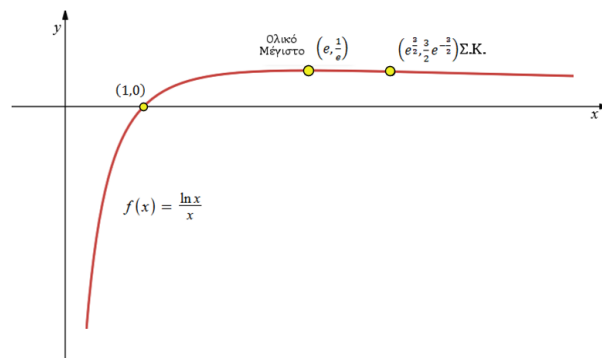
Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

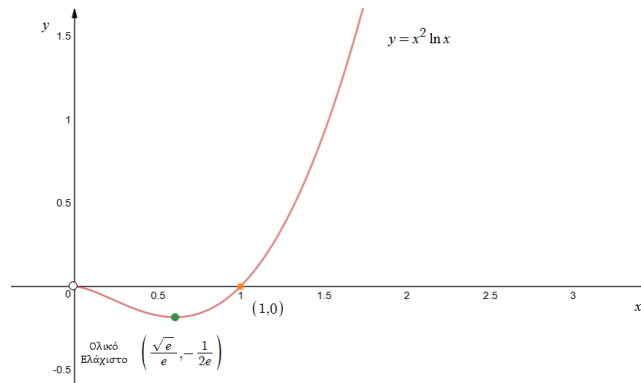
και αρα ο άξονας των τετμημένων είναι οριζόντια ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης καθώς  $x \rightarrow +\infty$  και ο άξονας των τεταγμένων κατακόρυφη ασύμπτωτη από τα δεξιά.

**Παρατήρηση:** Το σημείο τοπικού μεγίστου είναι και σημείο ολικού μεγίστου:

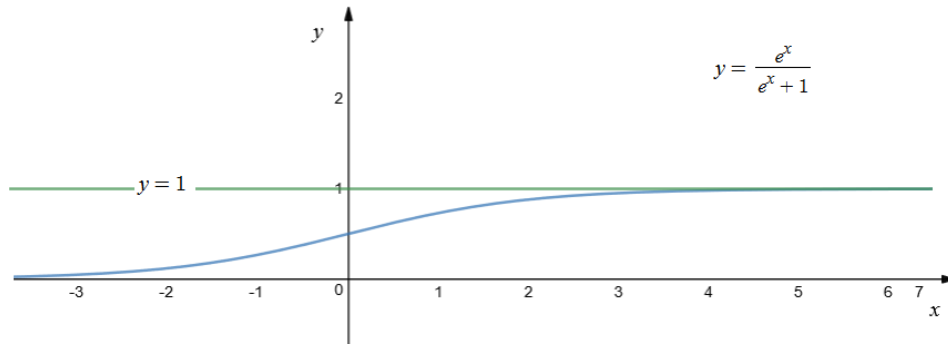
$$\min_{x \in (0, +\infty)} f(x) = f(e) = \frac{1}{e}$$



(ιγ)  $f(x) = x^2 \ln x$ .



(ιδ)  $f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$



2. Η συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = \frac{x+\kappa}{\sqrt{x}}$  ( $\kappa \in \mathbb{R}$ ) είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x} - \frac{x+\kappa}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{x-\kappa}{2x\sqrt{x}}, x > 0$$

και άρα

$$f'(1) = -1 \Leftrightarrow \frac{1-\kappa}{2} = -1 \Leftrightarrow \kappa = 3.$$

Άρα, η συνάρτηση γίνεται:  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$ . Θα κατασκευάσουμε το γράφημά της. Η συνάρτηση είναι παντού δις-παραγωγίσιμη στο Πεδίο Ορισμού της με

$$f'(x) = \frac{x-3}{2x^2}, \quad \forall x \in (0, +\infty) \text{ και } f''(x) = \frac{9-x}{4x^2}, \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

Είναι  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ . Έχουμε ότι

$\forall x \in (0, 3)$  είναι  $f'(x) < 0$  και άρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό ενώ  $\forall x \in (3, +\infty)$  είναι  $f'(x) > 0$  και άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Αλλά, αφού  $f'(3) = 0$ , έπεται από το κριτήριο της πρώτης παραγώγου ότι το γράφημα της συνάρτησης παρουσιάζει Τοπικό Ελάχιστο στο σημείο

$$(3, f(3)) = \left(3, \frac{6}{\sqrt{3}}\right)$$

Είναι  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 9$ . Έχουμε ότι

$\forall x \in (0, 9)$  είναι  $f''(x) > 0$  και άρα η συνάρτηση είναι κυρτή στο διάστημα αυτό και λόγω της συνέχειάς της στο σημείο  $x = 9$  είναι κυρτή στο διάστημα  $(0, 9]$  και αφού  $f'(x) < 0, \forall x \in (9, +\infty)$ , η συνάρτηση είναι κοίλη στο διάστημα αυτό και λόγω της συνέχειάς της στο σημείο  $x = 9$  είναι κοίλη στο διάστημα  $[9, +\infty)$ . Αλλά, αφού  $f''(9) = 0$ , έπεται ότι το γράφημα της συνάρτησης παρουσιάζει καμπή στο σημείο αυτό, δηλ. έχουμε Σ.Κ. στο  $(9, f(9)) = (9, 4)$ . Τέλος,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

και άρα ο άξονας των τεταγμένων είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης από τα δεξιά και ο άξονας των τετμημένων είναι οριζόντια ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης καθώς  $x \rightarrow +\infty$ .

