Διάλεξη

2

Σημαντικά Θεωρήματα στο Διαφορικό Λογισμό

-Θεώρημα του Rolle

-Θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού

Διδακτική προσέγγιση με βάση τους Δείκτες επάρκειας & επιτυχίας

Επιδιωκόμενοι διδακτικοί στόχοι:
-Σύνδεση με προηγούμενες γνώσεις: εφαπτόμενη στο γράφημα, παράδειγμα η παραβολή, μέθοδος της εις άτοπον απαγωγής, πως ορίζω κατάλληλη συνάρτηση για να μελετήσω λύσεις εξίσωσης.

-Να αντιληφθούν οι μαθητές ότι το Θεώρημα του Rolle και το Θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού είναι τοπικής φύσεως, ότι δηλαδή δουλεύουμε σε διάστημα.

-Οι υποθέσεις των Θεωρημάτων είναι αναγκαίες για την ισχύ τους (αντιπαράδειγμα), αλλά μπορεί ενώ να μην ικανοποιείται/ούνται κάποια/ες, το αποτέλεσμα να ισχύει (περιορισμός συνάρτησης σε διάστημα στο πεδίο ορισμού της).

- Σύνδεση εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής: μελέτη ανισοτικών σχέσεων.

-Πως μπορούν τα Θεωρήματα αυτά να μας βοηθήσουν στη μελέτη του γραφήματος μιας συνάρτησης (τοπικά), ισοδύναμα πως μπορούν οι εξισώσεις $f=0$ και $f'=0$ μας βοηθούν στη μελέτη γραφικής παράστασης.

-Να αντιλαβάνονται οι μαθητές πότε πρέπει να γίνεται χωρισμός του πεδίου ορισμού της συνάρτησης σε ένωση (ξένων) διαστημάτων και εφαρμογή των Θεωρημάτων σε κάθε ένα από αυτά.

Εφαρμοζόμενες Μαθηματικές Πρακτικές (ΜΠ)

ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων.
Χρησιμοποιώ εργαλεία των Μαθηματικών, για να εμβαθύνω στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών, να εξερευνώ και να κάνω εικασίες.
Επάρκεια: Δίνεται μια συνάρτηση *f* και ζητείται κατά πόσον αυτή ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle σε προκαθορισμένο διάστημα.
Επιτυχία: Ο μαθητής ελέγχει με τα εργαλεία που έμαθε στην προηγούμενη τάξη αν πληρούνται οι υποθέσεις (παραγωγισιμότητα στο εσωτερικό, συνέχεια στα άκρα του διαστήματος).

ΜΠ.8 Κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό
Κατανοώ επαναλαμβανόμενους συλλογισμούς και αναζητώ γενικεύσεις και σύντομες λύσεις.
Επάρκεια: Δίνεται μια συνάρτηση f και ζητείται να αποδειχθεί ότι έχει τουλάχιστον μία/ακριβώς μία/το πολύ μία λύση για την εξίσωση f=0.

Επιτυχία: Ο μαθητής εφαρμόζει τα Θεωρήματα που έμαθε (Bolzano, Rolle, ΘΜΤΔΛ), επαναληπτικά αν απαιτείται, στην επίλυση του προβλήματος.

Επάρκεια εκπαιδευτικού:
-Γνώση κατάλληλων παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων.
-Δημιουργία εποπτείας των μεθόδων που χρησιμοποιούνται (να γίνεται σχήμα με το χωρισμό (διαμέριση) του διαστήματος).

Βασικά Θεωρήματα

Στοιχεία Θεωρίας

Θεώρημα 0.0.1. *(Θεώρημα του Bolzano) Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα (κλειστό και φραγμένο) διάστημα $[\alpha, \beta]$. Τότε, αν $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$, υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.*

Θεώρημα του Bolzano $\longrightarrow$ ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Το πιο πάνω Θεώρημα αποδείχθηκε πρώτα από τον Bernard Bolzano το 1817, ο οποίος το εξέδωσε σε ένα οχι ευρέως γνωστό Βοημιανό περιοδικό. Ο Augustin-Louis Cauchy έδωσε μια απόδειξη το 1821. Και οι δύο όμως εμπνεύστηκαν από τη δουλειά του Joseph-Louis Lagrange.

▶ **Παράδειγμα 0.0.1.** *Έστω $f : \mathbb{R} \to (-2, 0)$ μια* ***συνεχής*** *συνάρτηση. Τότε, η συνάρτηση h με τύπο $h(x) = f^2(x) - 2f(x) - 6$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 2)$.*

Απάντηση: *Ας παρατηρήσουμε κατ΄ αρχάς ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το διάστημα $(-2, 0)$.*
Τώρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = f^2(x) - 2f(x) - 6 = f^2(x) - 2f(x) - 6x = f(x) \cdot (f(x) - 2) - 6x.$$

Είναι, $h(0) = f(0)(f(0) - 2) > 0$ και $h(2) = f^2(2) - 2f(2) - 6 = (f(2) - 4) \cdot (f(2) + 2) < 0$, αφού $f(0), f(2) \in (-2, 0)$.
Το ζητούμενο έπεται από το θεώρημα του Bolzano. □

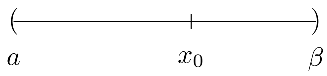
▶ **Παράδειγμα 0.0.2.** *Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^4 - x^2 + 3x + 1 = 0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο διάστημα $(-2, 0)$.*

Απάντηση: *Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^4 - x^2 + 3x + 1$. Η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Είναι $f(-2) = 7 > 0$ και $f(-1) = -2 < 0$ και αρα $f(-2) \cdot f(-1) < 0$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Bolzano για την f στο διάστημα $[-2, -1]$: υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi_0 \in (-2, -1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi_0) = 0$, δηλαδή υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi_0 \in (-2, -1)$ τέτοιο ώστε $\xi_0^4 - \xi_0^2 + 3\xi_0 + 1 = 0$. Επίσης, $f(-1) = -2 < 0$ και $f(0) = 1 > 0$ και αρα $f(-1) \cdot f(0) < 0$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Bolzano για την f στο διάστημα $[-1, 0]$: υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $f(\xi_1) = 0$, δηλαδή υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $\xi_1^4 - \xi_1^2 + 3\xi_1 + 1 = 0$. Έτσι, η εξίσωση $x^4 - x^2 + 3x + 1 = 0$ έχει τουλάχιστον 2 λύσεις στο διάστημα $(-2, 0)$.* □

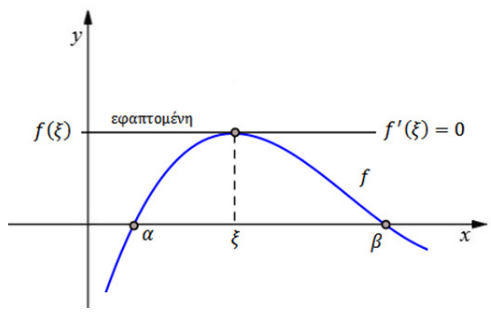
Θεώρημα 0.0.2. *Θεώρημα Rolle*

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα (κλειστό) διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλαδή στο (a, β) και τέτοια ώστε $f(a) = f(\beta)$. Τότε, υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

▶ **Παρατήρηση 0.0.1.** *Αναφερόμαστε για εσωτερικό ενός διαστήματος και σε εσωτερικά σημεία χωρίς να ορίσουμε (κατά τρόπον αυστηρό) το τι εννοούμε.*
Το μόνο που θα κρατήσουμε είναι η καταχρηστική έννοια του εσωτερικού σημείου: αν $\Delta = [a, \beta]$ ή $\Delta = [a, \beta)$ ή $\Delta = (a, \beta]$ ή $\Delta = (a, \beta)$, τότε αναφερόμενοι ως το εσωτερικό του διαστήματος Δ, θα εννοούμε το (διάστημα) (a, b) και κάθε σημείο x_0 του διαστήματος αυτού θα λέγεται εσωτερικό του σημείο. Για παράδειγμα, το εσωτερικό του διαστήματος $[0, +\infty)$ είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.



Γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος του Rolle
Το πιο πάνω Θεώρημα (με τις υποθέσεις που το συνοδεύουν), μας λέει ότι η παράγωγος της συνάρτησης στο (a, β) μηδενίζεται μια τουλάχιστον φορά, δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\xi \in (a, \beta)$ για το οποίο η εφαπτομένη στο σημείο αυτό είναι παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων (σχήμα (1)).



Σχήμα 1: Γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος του Rolle

$$\boxed{\text{Θεώρημα του Rolle} \longrightarrow \text{ρίζες της εξίσωσης } f'(x) = 0.}$$

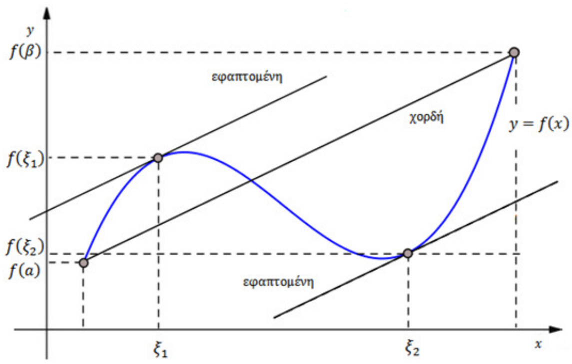
Θεώρημα 0.0.3. *(Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού)*

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα (κλειστό) διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλαδή στο (a, b). Τότε, υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιος ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

▶ **Παρατήρηση 0.0.2.** *Το πιο πάνω Θεώρημα λαμβάνει την ονομασία του από το πηλίκο που εμφανίζεται στον πιο πάνω τύπο, αφού αποτελεί μια μέση τιμή. Θυμηθείτε ότι η ποσότητα $(f(\beta) - f(a))/(\beta - a)$ είναι ο μέσος ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f στο (κλειστό) διάστημα $[a, \beta]$ ενώ η τιμή $f'(\xi)$ ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής στο σημείο με $x = \xi$. Το ΘΜΤΔΛ μας λέει ότι για κάποιο* *σημείο στο διάστημα (a,β), ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής ισούται με το μέσο ρυθμό μεταβολής σε όλο το διάστημα.*

Δηλαδή, ***μεταξύ οποιονδήποτε δύο σημείων του γραφήματος μιας συνάρτησης συνεχούς σε ένα (κλειστό) διάστημα*** $[a,\beta]$ ***και παραγωγίσιμης στο εσωτερικό του, υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα 2 αυτά σημεία.***



Σχήμα 2: Γεωμετρική ερμηνεία του ΘΜΤΔΛ

▶ **Παράδειγμα 0.0.3.**

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2-2x-5$, $x\in[-2,3]$. Είναι $f(x)=(x-1)^2-6$, $x\in[-2,3]$ και αρα το γράφημα της συνάρτησης εκφράζει παραβολή με κορυφή στο σημείο $(1,-6)$. Επίσης, $f(-2)=3$ και $f(3)=-2$. Έτσι, αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-2,3]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλαδή στο $(-2,3)$ ως πολυωνυμική, από το ΘΜΤΔΛ,

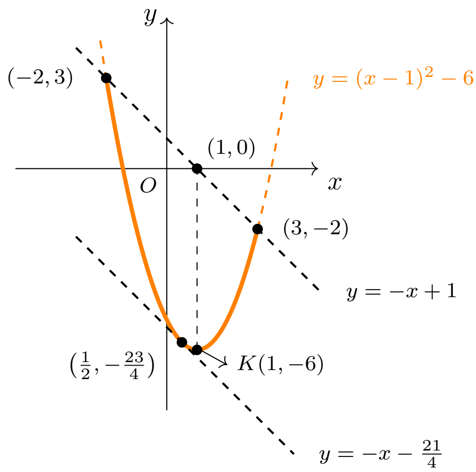
$$\exists\ \xi\in(-2,3)\ :\ f'(\xi)=\frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}=-1.$$

Έχουμε $f'(\xi)=-1 \Longleftrightarrow 2\xi-2=-1 \Longleftrightarrow \xi=\frac{1}{2}\in(-2,3)$.

Γεωμετρική ερμηνεία:

Στο σημείο $\xi=\frac{1}{2}\in(-2,3)$, ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής ισούται με το μέσο ρυθμό μεταβολής σε όλο το διάστημα $(-2,3)$. Δηλαδή στο οποίο η εφαπτομένη στο σημείο αυτό είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(-2,f(-2))=(-2,3)$ και $(3,f(3))=(3,-2)$.

Σημείωση: *Είναι $f'(1/2)=-1$ και $f(1/2)=-23/4$ και η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $(1/2,-23/4)$ είναι η $y=-x-21/4$ και η οποία είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία με $x=-2$ και με $x=3$ και το οποίο έχει εξίσωση $y=-x+1$.*



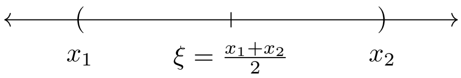
Γενικότερα, στην περίπτωση της παραβολής, ο ξ που ικανοποιεί τις υποθέσεις του ΘΜΤΔΛ είναι ο μέσος όρος των άκρων του εν λόγω διαστήματος, δηλαδή αν $y=f(x)=ax^2+bx+x$, $a\neq 0$ και $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$, το οποίο είναι το $\xi=(x_1+x_2)/2$.

Απόδειξη. Επαληθεύονται οι υποθέσεις του ΘΜΤΔΛ για την f στο διάστημα $[x_1, x_2]$:

$$\exists\, \xi \in (x_1, x_2) \ : \ f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Θα βρούμε τα ξ που ικανοποιούν την πιο πάνω. Αλλά, $f'(x) = 2ax + b,\ \forall x \in \mathbb{R}$ και αρα

$$\begin{aligned} f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad &\Leftrightarrow \quad 2a\xi + b = \frac{ax_2^2 + bx_2 + c - (ax_1^2 + bx_1 + c)}{x_2 - x_1} \\ &\Leftrightarrow \quad 2a\xi + b = \frac{a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \\ &\Leftrightarrow \quad 2a\xi + b = a(x_2 + x_1) + b \\ &\Leftrightarrow \quad \xi = \frac{x_2 + x_1}{2}. \end{aligned}$$



□

▶ **Παρατήρηση 0.0.3.** *Ιδιαίτερα, σε κάθε διάστημα $[a, b]$, υπάρχει μοναδικό $\xi \in (a, b)$ το οποίο ικανοποιεί το αποτέλεσμα του Θεωρήματος του Rolle για την παραβολή $y = f(x) = ax^2 + bx + x$, $a \neq 0$ και αυτό είναι το σημείο $x = -\frac{b}{2a}$, δηλ. η τετμημένη της κορυφής του γραφήματος της παραβολής.*

Στην προηγούμενη τάξη είδαμε ότι η παράγωγος (συνάρτηση) μιας σταθερής συνάρτησης είναι η μηδενική συνάρτηση. Τώρα, θα δούμε ότι ισχύει το αντίστροφο του πιο πάνω, στην περίπτωση που η συνάρτηση είναι παντού παραγωγίσιμη σε ενα ανοικτό διάστημα:

Πόρισμα 0.0.1.

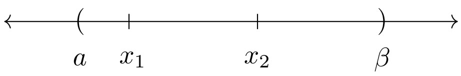
Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β) τέτοια ώστε $f'(x) = 0,\ \forall x \in (a, \beta)$. Τότε, υπάρχει πραγματική σταθερά c τέτοια ώστε $f(x) = c,\ \forall x \in (a, \beta)$. Δηλαδή η συνάρτηση f είναι σταθερή[a] στο (a, β).

[a] Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι σταθερή αν και μόνο αν $f(x_1) = f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in A$.

Απόδειξη. Έστω $x_1,\ x_2 \in (a, \beta)$ με $x_1 < x_2$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β), έπεται ότι θα είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλαδή στο διάστημα (x_1, x_2). Συνεπώς, από το ΘΜΤ, θα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Αλλά, από υπόθεση έχουμε ότι $f'(\xi) = 0$ και η πιο πάνω δίνει ότι $f(x_2) = f(x_1)$. Αφού τα $x_1,\ x_2$ είναι τυχόντα, έπεται ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.



□

▶ **Παρατήρηση 0.0.4.** *Ας δούμε ένα αντι-παράδειγμα στο οποίο το Πόρισμα 0.0.1 καταρρέει* ***όταν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης δεν είναι διάστημα****: Έστω η συνάρτηση f με τύπο*

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

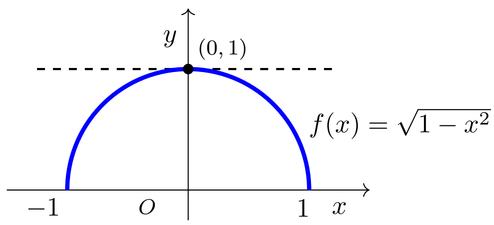
έχει π.ο. το $D(f) = \mathbb{R}_* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ το οποίο είναι[1] ένωση διαστημάτων. Είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με $f'(x) = 0, \forall x \in D(f)$ αλλά δεν είναι σταθερή, αφού (π.χ) $f(-2) = -1 \neq 1 = f(2)$. □

▶ **Παρατήρηση 0.0.5.** *Η παραγωγισιμότητα στα άκρα του διαστήματος (δηλαδή η ύπαρξη πλευρικών παραγώγων) δεν παίζει ρόλο στην ισχύ του ΘΜΤΔΛ (προφανώς και στο Θεώρημα του Rolle). Ας δούμε ένα παράδειγμα:*
Έστω η συνάρτηση $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Στα σημεία $x = \pm 1$, η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη[2], αλλά στο διάστημα $(-1, 1)$ είναι με $f'(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$ και είναι συνεχής στο $[-1, 1]$. Πληρούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle:

$$\exists\, \xi \in (-1, 1) \ : \ f'(\xi) = 0.$$

Θα βρούμε τα ξ που ικανοποιούν την πιο πάνω:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in (-1, 1).$$



Πόρισμα 0.0.2.

Έστω f, g συναρτήσεις παραγωγίσιμες σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β) τέτοιες ώστε $f'(x) = 0, \forall x \in (a, \beta)$ και $g'(x) = 0, \forall x \in (a, \beta)$. Τότε, υπάρχει πραγματική σταθερά c τέτοια ώστε $f(x) = g(x) + c, \forall x \in (a, \beta)$. Δηλαδή οι συναρτήσεις f και g διαφέρουν (στο (a, β)) κατά μια (πραγματική) σταθερά.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από το Πόρισμα (0.0.1) εφαρμοσμένο στη συνάρτηση $f - g$. □

[1] Συγκεκριμένα είναι ένωση ξένων διαστημάτων, δηλαδή διαστημάτων που δεν εχουν κοινά σημεία.
[2] οι πλευρικές παράγωγοι απειρίζονται

Απόδειξη ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης/ρίζας

Ακριβώς μία λύση/ρίζα $\equiv$ **τουλάχιστον μία** $+$ **το πολύ μία** λύση/ρίζα

Ως εφαρμογή των Θεωρημάτων του Bolzano και του Rolle μπορούμε να διερευνήσουμε αν μια εξίσωση $f(x) = 0$ έχει **λύση** σε ένα διάστημα, το οποίο ενδέχεται να μας δίνεται είτε να βρούμε εμείς ένα κατάλληλο διάστημα. Για να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα πιο πάνω Θεωρήματα, πρέπει **η εξίσωση να καθορίζει μία συνάρτηση**. Τότε μιλάμε για **σημεία τομής του γραφήματος της συνάρτησης με τον άξονα των τετμημένων**, δηλαδή σημεία της μορφής $(x, 0)$. Τότε, το μεν Θεώρημα του Bolzano διερευνά την ύπαρξη (μίας τουλάχιστον) λύσης της εξίσωσης $f = 0$ και το Θεώρημα του Rolle μας βοηθά να δείξουμε αν η λύση αυτή είναι μοναδική στο εν λόγω διάστημα, θεωρώντας δύο διαφορετικές λύσεις και κατλήγουμε σε άτοπο (αντίφαση). Αυτή είναι ίσως και η πρώτη επαφή ενός μαθητή με συλλογισμούς ανωτάτων Μαθηματικών.
Επειδή με τα εργαλεία που μαθαίνουμε δεν είμαστε σε θέση να **διερευνήσουμε** εκ των προτέρων αν η εν λόγω εξίσωση έχει λύση, τα προβλήματα τίθονται με την προϋπόθεση ότι υπάρχει μία τουλάχιστον λύση.

► **Παράδειγμα 0.0.4.** *Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^3 - x = 1$ έχει ακριβώς μία (μοναδική) λύση στο διάστημα $(1, 2)$.*

Απάντηση: $x^3 - x = 1 \Leftrightarrow x^3 - x - 1 = 0.$
Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = x^3 - x - 1.$$

Η f είναι πολυωνυμική, άρα συνεχής στο $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλαδή στο διάστημα $(1, 2)$.

Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(1, 2)$:
Είναι $f(1) = -1 < 0$ και $f(2) = 5 > 0$ και αρα $f(1)f(2) < 0$. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Bolzano$\Rightarrow$ $\exists \xi \in (1, 2) \ : \ f(\xi) = 0$.

Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία λύση στο διάστημα $(1, 2)$:
Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει δύο (διακεκριμένες) λύσεις x_1, x_2 στο διάστημα $(1, 2)$ έστω με $x_1 < x_2$, δηλαδή $f(x_1) = 0 = f(x_2)$. Τότε, ορίζεται το διάστημα (x_1, x_2) το οποίο περιέχεται (γνήσια) στο διάστημα $(1, 2)$.
Ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle για την f στο διάστημα (x_1, x_2) :

$$\exists \ \xi \in (x_1, x_2) \ : \ f'(\xi) = 0.$$

Αλλά,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Καμία όμως από τις πιο πάνω λύσεις της $f' = 0$ δεν ανήκει στο διάστημα $(1, 2)$.
Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο.
*Άρα, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση και το πολύ μία λύση στο διάστημα $(1, 2)$, άρα **ακριβώς** μία λύση στο διάστημα αυτό.* ◄

▶ **Παράδειγμα 0.0.5.** *Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + 2x^3 + 3x^2 - \lambda x + 1 = 0$, έχει το πολύ δύο πραγματικές λύσεις για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.*

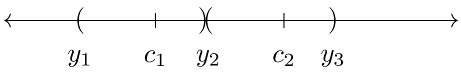
Απάντηση: *Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθεροποιημένο. Θεωρούμε τη συνάρτηση f_λ με τύπο*

$$f_\lambda(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - \lambda x + 1.$$

Υποθέτουμε ότι η f_λ έχει 3 διαφορετικές ρίζες, τις y_1, y_2, y_3. Έστω χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι $y_1 < y_2 < y_3$. Αφού $f_\lambda(y_1) = f_\lambda(y_2) = 0$, από το Θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[y_1, y_2]$, υπάρχει $c_1 \in (y_1, y_2)$ τέτοιο ώστε $f'_\lambda(c_1) = 0$. Ομοίως, αφού $f_\lambda(y_2) = f_\lambda(y_3) = 0$, (ξανά) από το Θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[y_2, y_3]$, υπάρχει $c_2 \in (y_2, y_3)$ τέτοιο ώστε $f'_\lambda(c_2) = 0$. Προφανώς, $c_1 \neq c_2$.
Εφαρμόζουμε το το Θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[c_1, c_2]$: υπάρχει $c_3 \in (c_1, c_2)$ τέτοιο ώστε $f''_\lambda(c_3) = 0$.
Αλλά,

$$f''_\lambda(x) = 12x^2 + 12x + 6 = 6(2x^2 + 2x + 1) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Καταλήξαμε σε άτοπο. Συνεπώς, για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $x^4 + 2x^3 + 3x^2 - \lambda x + 1 = 0$ έχει το πολύ 2 πραγματικές λύσεις.



◀

▶ **Παράδειγμα 0.0.6.** *Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$, δυο φορές παραγωγίσιμη στο (a, b) με $f(a) = f(b) = 0$. Αν για κάποιο $\gamma \in (a, b)$ είναι $f(\gamma) > 0$, να αποδείξετε ότι:*

(i) *Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a, b)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) < 0$.*

(ii) *Υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) < 0$.*

Απάντηση: Η ιδέα είναι να χωρίσουμε το διάστημα $[a, b]$ κατάλληλα και να εφαρμόσουμε το Θεώρημα της μέσης τιμής του Δ.Λ.. Τα δυο διαστήματα στα οποία 'χωρίζουμε' το $[a, b]$ είναι το $[a, \gamma]$ και το $[\gamma, b]$.
Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤΔΛ για την f σε κάθε ενα από τα διαστήματα $[a, \gamma]$ και $[\gamma, b]$: υπάρχουν $\xi_1 \in (a, \gamma)$ και $\xi_2 \in (\gamma, b)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\gamma) - f(a)}{\gamma - a} = \frac{f(\gamma)}{\gamma - a}$$

και

$$f'(\xi_2) = \frac{f(b) - f(\gamma)}{b - \gamma} = -\frac{f(\gamma)}{b - \gamma}.$$

Αλλά $f(\gamma) > 0 = f(a)$ και $\gamma - a > 0$, οπόταν $f'(\xi_1) > 0$ και ομοίως $f'(\xi_2) < 0$.
Έτσι:

(i) $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) < 0$.

(ii) Είναι $\xi_1 < \xi_2$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤΔΛ για την f' στο διάστημα (ξ_1, ξ_2): υπάρχει $\xi_* \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε

$$f''(\xi_*) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1}.$$

Αλλά $f'(\xi_2) < 0 < f'(\xi_1)$ και αρα $f''(\xi_*) < 0$.

◀

Κατασκευή ανισώσεων με χρήση του ΘΜΤΔΛ

Το Θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού εκ φύσεως μας επιτρέπει να βρίσκουμε 'προσεγγίσεις' αριθών αλλά και γενικότερα, να κατασκευάζουμε φράγματα (ανισώσεις) για μία συνάρτηση, πάντοτε όμως τοπικά.

▶ **Παράδειγμα 0.0.7.** *Θα δείξουμε ότι*

$$\frac{1}{2} < \ln 2 < 1.$$

Απάντηση: Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln x$. Είναι καλά ορισμένη στο διάστημα $[1, 2]$, συνεχής σε αυτό και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλαδή στο $(1, 2)$. Έτσι, από το ΘΜΤΔΛ, υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Αλλά, $f'(x) = 1/x, \ \forall x \in (1, 2)$ και αρα η πιο πάνω μας δίνει ότι $\ln 2 = \frac{1}{\xi}$. Τώρα, αφού $\xi \in (1, 2)$, δηλαδή $0 < 1 < \xi < 2$, έχουμε ότι

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\xi} < 1.$$

Συνεπώς,

$$\begin{cases} \ln 2 = \dfrac{1}{\xi} \\ \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{\xi} < 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \ \frac{1}{2} < \ln 2 < 1.$$

▶ **Παράδειγμα 0.0.8.** *Να αποδειχθεί ότι ισχύει η ανίσωση*

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Απάντηση: Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln x, \ x > 0$. Έστω $x > 0$ **σταθεροποιημένο**. Τότε, ορίζεται το διάστημα $[x, x+1]$. Εφαρμόζεται το ΘΜΤΔΛ στο διάστημα αυτό:

$$\exists\ \xi \in (x, x+1) \ : \ f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x + 1 - x} = \ln(x+1) - \ln x = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

Αλλά $f'(\xi) = 1/\xi$ και αρα

$$\frac{1}{\xi} = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

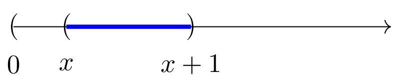
Όμως,

$$0 < x < \xi < x + 1 \ \Rightarrow \ \frac{1}{x+1} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

και αφού το x ήταν τυχόν, το συμπέρασμα έπεται.



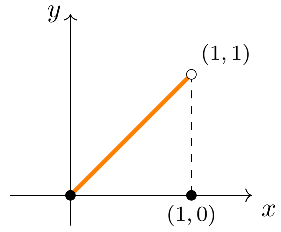
Ερωτήσεις κατανόησης

1. Έστω η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Ισχύει το αποτέλεσμα του ΘΜΤΔΛ για τη συνάρτηση αυτή στο διάστημα $[0,1]$;

Απάντηση:
Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f(0) = 0 = f(1)$. Όμως, το συμπέρασμα του ΘΜΤΔΛ δεν ισχύει: δεν υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 0$, αφού $f'(x) = 1 \neq 0$, $\forall x \in (0,1)$. Το αποτέλεσμα αυτό **δεν έρχεται σε αντίθεση με το Θεώρημα του Rolle** (άρα ούτε και στο ΘΜΤΔΛ) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $[0,1]$ (παρουσιάζει ασυνέχεια στο $x = 1$).



$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

2. Έστω f η συνάρτηση με τύπο $f(x) = 2 - |1 - x|$. Εξηγήστε γιατί δεν μπορεί να εφαρμοστεί το ΘΜΤΔΛ για τη συνάρτηση αυτή στο διάστημα $[0,2]$. Γιατί δεν μπορεί να υπάρξει αριθμός $\xi \in (0,2)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = 2$;

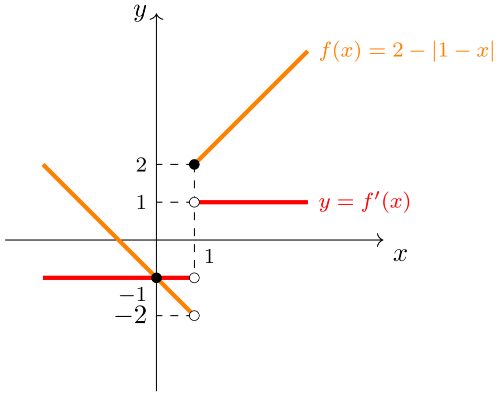
Απάντηση: Κατ΄ αρχάς είναι

$$f(x) = 2 - |1 - x| = \begin{cases} 2 - (1 - x), & x \ge 1 \\ (1 - x) - 2, & x < 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 + x, & x \ge 1 \\ -x - 1, & x < 1 \end{cases}$$

και εύκολα δείχνουμε ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $\mathbb{R} - \{1\}$ με

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ -1, & x < 1 \end{cases}.$$

Έτσι, δεν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤΔΛ στο διάστημα $[0,2]$. Δεν μπορεί να υπάρξει αριθμός $\xi \in (0,2)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = 2$, αφού για κάθε $\xi \in (0,2)$ είτε $f'(\xi) = -1$ είτε $f'(\xi) = 1$ είτε ο $f'(\xi)$ δεν ορίζεται.



3. Υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = -1,\ f(1) = 4$ και $|f'(x)| \leq 4,\ \forall x \in (0,1)$;

   Απάντηση: Αν υπήρχε τέτοια συνάρτηση f, τότε από το ΘΜΤΔΛ για την f στο διάστημα $[0,1]$, υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - f(0) = 4 - (-1) = 5.$$

   Αλλά, από υπόθεση, είναι $|f'(x)| \leq 4,\ \forall x \in (0,1)$, δηλαδή

$$-4 \leq f'(x) \leq 4,\ \forall x \in (0,1).$$

   Συνεπώς, δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση.

4. Δείξτε ότι δεν υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f'(0) = 0$ και $f'(x) \geq 1,\ \forall x \in (0,1]$.

   Απάντηση: Έστω ότι υπάρχει τέτοια συνάρτηση f. Τότε, για κάθε $x \in (0,1]$, από το ΘΜΤΔΛ για την f στο διάστημα $[0,x]$, υπάρχει $\xi \in (0,x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

   και αρα

$$\lim_{x \to 0} f'(\xi) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x},$$

   δηλαδή $f'(\xi) = f'(0) = 0$. Αλλά, $f'(\xi) \geq 1$. Καταλήξαμε σε άτοπο.

Ασκήσεις στο Θεώρημα του Rolle και στο ΘΜΤΔΛ

1 Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f^3(x) + f(x) = 3x - 1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο εσωτερικό του διαστήματος $[-1, 1]$.

2 Έστω $f : [0, 1] \to [-5, -3]$ συνεχής συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = (x - 1)f(x) - 2$. Να αποδειχθεί ότι:

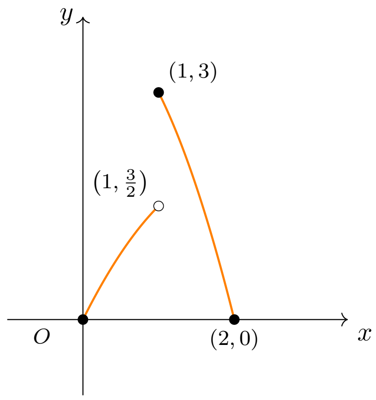
(i) $g(0) \cdot g(1) < 0$.

(ii) Υπάρχει τουλάχιστον ενα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

(iii) Η εξίσωση $f(x) = 2/(x - 1)$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $(0, 1)$.

3 (Δείκτες) Στο πιο κάτω διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2, & x \in [0, 1) \\ -x^2 + 4, & x \in [1, 2] \end{cases}.$$



Να εξεταστεί κατά πόσο η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0, 2]$.

4 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1.$$

Να δείξετε ότι ικανοποιούνται για τη συνάρτηση f όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0, 2]$. Στη συνέχεια, να βρείτε τα $\xi \in (0, 2)$ που ικανοποιούν το συμπέρασμα του Θεωρήματος του Rolle.

5 Να εξετάσετε κατά πόσο ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle για την πιο κάτω συνάρτηση στο δοσμένο διάστημα και να βρείτε, αν υπάρχει, την τιμή του ξ που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος στο $[-5, 2]$:

$$f(x) = \ln(x^2 + 3x + 3).$$

(6) Δίνεται συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, όπου $\alpha > 0$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, να δείξετε ότι:

(α) Η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

(β) Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\xi f'(\xi) = f(\xi)$.

(7) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει αριθμός $\xi \in (-1, 1)$ για τον οποίο ισχύει το συμπέρασμα του Θεωρήματος μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{2x+3}{3x+2}.$$

(8) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{k}{x},$$

όπου $k > 0$, ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$, όπου $0 < a < b$.
Να εξετάσετε κατα πόσο ισχύει το ΘΜΤΔΛ και αν ναι, να βρείτε μια τιμή του ξ για την οποία ισχύει.

(9) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x^3 - 3x^2 - 36x + \text{συν}\lambda = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$ έχει **το πολύ** μια ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$ για κάθε επιλογή της παραμέτρου λ.

(10) Να αποδείξετε ότι:

(α) Η εξίσωση $x^5 - 3x^3 + 5x - 2 = 0$ έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(0, 1)$.

(β) Η εξίσωση $2 - \ln x = x^2$ έχει **μοναδική** λύση στο διάστημα $(1, e)$.

(11) Να αποδείξετε ότι ισχύει η πιο κάτω ανιίσωση:

$$(b-a)\text{τεμ}^2 a < \text{εφ}b - \text{εφ}a < (b-a)\text{τεμ}^2 b,$$

όπου $0 \leq a < b < \frac{\pi}{2}$.

(12) Να αποδειχθεί ότι αν $a < b$, τότε

$$e^a < \frac{e^b - e^a}{b - a} < e^b.$$

(13) (Δείκτες) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[1, 3]$ και τέτοια ώστε $f(1) = 2$ και $2 < f'(x) < 4$ για κάθε $x \in (1, 3)$. Να δειχθεί ότι

$$|f(3) - 8| < 2.$$

(14) (Δείκτες) Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύουν $f'(x) = g(x)$ και $f(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $h = f^2 - g^2$ είναι σταθερή.

Λύσεις

(1) Έχουμε $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f^3(x) + f(x) = 3x - 1 \quad &\Leftrightarrow \quad f(x)(f^2(x) + 1) = 3x - 1 \\ (f^2(x) + 1 > 0,\ \forall x) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) = \frac{3x - 1}{f^2(x) + 1} \end{aligned}$$

και άρα

$$f(-1) = -\frac{4}{f^2(-1) + 1} < 0, \qquad f(1) = \frac{2}{f^2(-1) + 1} > 0.$$

Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Bolzano για την f στο διάστημα $[-1, 1]$:

$$\exists\, \xi \in (-1, 1)\ :\ f(\xi) = 0.$$

◀

(2) **(i)** Είναι $g(0) = (0 - 1) \cdot f(0) - 2 = -f(0) - 2$ και $g(1) = (1 - 1) \cdot f(1) - 2 = -2$. Έτσι, $g(0) \cdot g(1) = 2(f(0) + 2)$. Αλλά $R(f) = [-5, -3]$ και αρα

$$-5 \le f(0) \le -3 \Rightarrow -3 \le f(0) + 2 \le -1 \Rightarrow g(0) \cdot g(1) \le -2 < 0.$$

(ii) Αφού η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και η g θα είναι συνεχής στο $[0, 1]$, ως σύνθεση συνεχών.
Τώρα, από το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Bolzano για την f στο διάστημα $[0, 1]$ $\Rightarrow$ υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

(iii) $x \in (0, 1) \Rightarrow (x - 1)x - 1 \neq 0$. Τότε,

$$f(x) = \frac{2}{x - 1} \Leftrightarrow (x - 1)f(x) - 2 = 0$$

και το αποτέλεσμα έπεται άμεσα από το προηγούμενο ερώτημα. ◀

(3) Η f δεν ικανοποιεί της υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0, 2]$, παρ᾽ όλο που $f(0) = 0 = f(2)$, αφού η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο διάστημα αυτό:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{3}{2} \neq 3 = f(1).$$

Αυτό είναι που μας δείχνει και η γραφική παράσταση της συνάρτησης. ◀

(4) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του (ως πολυωνυμική).
Επίσης, εύκολα βλέπουμε ότι $f(0) = 1 = f(2)$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Rolle για την f στο διάστημα $[0, 2]$: υπάρχει (τουλάχιστον ενα) $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Αλλά, $\forall x \in (0, 2)$ είναι

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

και αρα

$$\xi \in (0, 2) :\ f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow\ \xi \in (0, 2)\ :\ 3\xi^2 - 6\xi + 2 = 0.$$

Λύνουμε την **εξίσωση** $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1}{3}(3 \pm \sqrt{3}) \in (0, 2)$$

και αρα τα ξ που ψάχνουμε είναι τα $\boxed{\xi_{1,2} = \frac{1}{3}(3 \pm \sqrt{3})}$. ◀

5 Κατ' αρχάς, η διακρίνουσα Δ του **τριωνύμου** $x^2 + 3x + 3$ είναι $\Delta = -3 < 0$ και αφού ο μεγιστοβάθμιος του όρος είναι θετικός, τότε $x^2 + 3x + 3 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Έτσι, η συνάρτηση f είναι καλά ορισμένη (έχει δηλαδή νόημα).

Τώρα, η f είναι συνεχής και επίσης παραγωγίσιμη παντού ως σύνθεση τέτοιων. Αλλά, $f(-5) = \ln(13) = f(2)$ και αρα ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[-5, 2]$. Αρα, υπάρχει (τουλάχιστον ενα) $\xi \in (-5, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Είναι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 3} = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \in (-5, 2)$$

και αρα το ξ που ψάχνουμε είναι το $\boxed{\xi = -\frac{3}{2}}$. ◀

6 **(α)** Η συνάρτηση g είναι καλά ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ αφού $\alpha > 0$. Επίσης, είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ (ως πηλίκο τέτοιων) και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του (ως πηλίκο παραγωγίσιμων). Επίσης,

$$g(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{0}{\alpha} = 0$$

και

$$g(\beta) = \frac{f(\beta)}{\beta} = \frac{0}{\beta} = 0$$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle για την g στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

(β) Από το Θεώρημα του Rolle για την g στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, έχουμε ότι υπάρχει (τουλάχιστον) ενα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$. Αλλά, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ είναι

$$g'(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f'(x) \cdot x - f(x) \cdot x'}{x^2} = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

και αρα

$$g'(\xi) = 0 \Longleftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0 \Longleftrightarrow \xi f'(\xi) = f(\xi).$$

◀

7 Κατ' αρχάς, το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $\mathbb{R} - \{-2/3\}$. Το σημείο $-2/3$ ανήκει στο διάστημα $(-1, 1)$ και αρα δεν εφαρμόζεται το ΘΜΤΔΛ. Θα ελέγξουμε αν όμως ισχύει το **αποτέλεσμά** του ή όχι. Έστω ότι υπάρχει αριθμός $\xi \in (-1, -2/3) \cup (-2/3, 1)$ για τον οποίο

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1 - (-1)}{2} = 1.$$

Αλλά, για $x \in (-1, -2/3) \cup (-2/3, 1)$, είναι

$$f'(x) = -\frac{5}{(3x + 2)^2}$$

και αρα

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow -\frac{5}{(3x+2)^2} = 1 \Leftrightarrow (3x+2)^2 = -5.$$

Συνεπώς, δεν υπάρχει αριθμός $\xi \in (-1, -2/3) \cup (-2/3, 1)$ για τον οποίο ισχύει το συμπεράσμα του ΘΜΤΔΛ. ◄

8 Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{k}{x}$ είναι καλά ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$, αφού $0 < a < b$. Επίσης, στο διάστημα αυτό, είναι $f > 0$, δηλαδή η f διατηρεί σταθερό (θετικό) πρόσημο. Είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλαδή στο (a, b) με

$$f'(x) = -\frac{k}{x^2}.$$

Έτσι, από το ΘΜΤΔΛ, υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

δηλαδή

$$f'(\xi) = \frac{\frac{k}{b} - \frac{k}{a}}{b - a} = k\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a} = k\frac{a - b}{ab(b - a)} = -\frac{k}{ab}$$

και αρα

$$f'(x) = -\frac{k}{ab} \Leftrightarrow -\frac{k}{x^2} = -\frac{k}{ab} \Leftrightarrow x^2 = ab \Leftrightarrow x = \sqrt{ab},$$

αφού $0 < a \leq x \leq b$.

Έτσι, το ξ που ψάχνουμε είναι το $\boxed{\xi = \sqrt{ab}}$. ◄

9 Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθεροποιημένο. Θεωρούμε τη συνάρτηση f_λ με τύπο $f_\lambda = 2x^3 - 3x^2 - 36x + \text{συν}\lambda$.

Η συνάρτηση f_λ έχει το πολύ 1 ρίζα: Υποθέτουμε ότι η f_λ έχει δύο διαφορετικές ρίζες $x_1,\ x_2$ στο διάστημα $(0, 1)$, δηλαδή $f_\lambda(x_1) = 0 = f_\lambda(x_2)$. Τότε από το Θεώρημα του Rolle, η f'_λ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2). Αλλά,

$$f'_\lambda(x) = 6(x^2 - x - 6) = 6(x - 3)(x + 2)$$

και αρα η

f'_λ έχει ακριβώς δύο ρίζες, καμία εκ των οποίων δε βρίσκεται στο διάστημα $(0, 1)$.
Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο. ◄

10 **(α)** Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = x^5 - 3x^3 + 5x - 2.$$

Η f είναι πολυωνυμική, άρα συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλαδή στο διάστημα $(0, 1)$.

Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(0, 1)$:
Είναι $f(0) = -2 < 0$ και $f(1) = 1 > 0$ και αρα $f(0)f(1) < 0$. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Bolzano$\Rightarrow\ \exists \xi \in (0, 1)\ :\ f(\xi) = 0$.

Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία λύση στο διάστημα $(0, 1)$:
Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει δύο (διακεκριμένες) λύσεις x_1, x_2 στο διάστημα $(0, 1)$ έστω με

$x_1 < x_2$, δηλαδή $f(x_1) = 0 = f(x_2)$. Τότε, ορίζεται το διάστημα (x_1, x_2) το οποίο περιέχεται (γνήσια) στο διάστημα $(0, 1)$.
Ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle για την f στο διάστημα (x_1, x_2) :

$$\exists\, \xi \in (x_1, x_2) \ : \ f'(\xi) = 0.$$

Αλλά,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 9x^2 + 5 = 0.$$

Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι το πρόσημο της παράστασης $5x^4 - 9x^2 + 5$ είναι παντού θετικό (θέτοντας π.χ. $u = x^2$ και παρατηρώντας ότι το αντίστοιχο τριώνυμο $5u^2 - 9u + 5$ είναι παντού θετικό).
Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο.

Άρα, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση και το πολύ μία λύση στο διάστημα $(0, 1)$, άρα **ακριβώς** μία λύση στο διάστημα αυτό.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = x^2 + \ln x - 2.$$

Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(0, +\infty)$, είναι σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, άρα συνεχής στο $[1, e]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλαδή στο διάστημα $(1, e)$.

Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(1, e)$:
Είναι $f(1) = -1 < 0$ και $f(e) = e^2 - 1 > 0$ και αρα $f(1)f(e) < 0$. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Bolzano$\Rightarrow$ $\exists \xi \in (1, e) \ : \ f(\xi) = 0$.

Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία λύση στο διάστημα $(1, e)$:
Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει δύο (διακεκριμένες) λύσεις x_1, x_2 στο διάστημα $(1, e)$ έστω με $x_1 < x_2$, δηλαδή $f(x_1) = 0 = f(x_2)$. Τότε, ορίζεται το διάστημα (x_1, x_2) το οποίο περιέχεται (γνήσια) στο διάστημα $(1, e)$.
Ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle για την f στο διάστημα (x_1, x_2) :

$$\exists\, \xi \in (x_1, x_2) \ : \ f'(\xi) = 0.$$

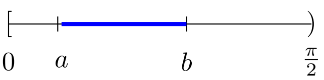
Αλλά,

$$f'(x) = 2x^2 + \frac{1}{x} > 0, \ \forall x \in (x_1, x_2)$$

και αρα η εξίσωση $f'(x) = 0$ δεν έχει λύση στο διάστημα (x_1, x_2). Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο.

Άρα, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση και το πολύ μία λύση στο διάστημα $(1, e)$, άρα **ακριβώς** μία λύση στο διάστημα αυτό. ◀

11 Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $0 \le a < b < \frac{\pi}{2}$.
Ορίζεται το διάστημα $[a, b]$.



(εδώ το a μπορεί να είναι και το 0)
Θεωρείται γνωστό, από την προηγούμενη τάξη, ότι η συνάρτηση $g(x) =$ τεμx είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Συνεπώς,

$$x < y \Rightarrow \text{τεμ}ax < \text{τεμ}ay.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \text{εφ}x$.
Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλαδή στο διάστημα (a, b). Πληρούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤΔΛ:

$$\exists\ \xi \in (a, b)\ :\ f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

δηλαδή

$$\exists\ \xi \in (a, b)\ :\ \text{τεμ}^2\xi = \frac{\text{εφ}b - \text{εφ}a}{b - a}.$$

Αλλά,

$$a < \xi < b \Rightarrow \text{τεμ}a < \text{τεμ}\xi < \text{τεμ}b \Rightarrow \text{τεμ}^2 a < \text{τεμ}^2\xi < \text{τεμ}^2 b$$

και αρα, από τα πιο πάνω,

$$(b - a)\text{τεμ}^2 a < \text{εφ}b - \text{εφ}a < (b - a)\text{τεμ}^2 b,$$

◄

(12) Έστω $a < b$. Θεωρείται γνωστό, από την προηγούμενη τάξη, ότι η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Συνεπώς,

$$x < y \Rightarrow e^x < e^y.$$

Η $f(x) = e^x$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλαδή στο (a, b) με $f'(x) = e^x$. Πληρούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤΔΛ:

$$\exists\ \xi \in (a, b)\ :\ f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{e^b - e^a}{b - a},$$

δηλαδή

$$\exists\ \xi \in (a, b)\ :\ e^\xi = \frac{e^b - e^a}{b - a}.$$

Αλλά,

$$a < \xi < b \Rightarrow e^a < e^\xi < e^b$$

Συνεπώς,

$$e^a < \frac{e^b - e^a}{b - a} < e^b.$$

◄

(13) Ίσως να είναι ευκολότερο αν επαναδιατυπώσουμε (ισοδύναμα) το ζητούμενο:

$$\begin{aligned} |f(3) - 8| < 2 \quad &\Leftrightarrow \quad -2 < f(3) - 8 < 2 \\ &\Leftrightarrow \quad 8 - 2 < f(3) < 8 + 2 \\ &\Leftrightarrow \quad 6 < f(3) < 10. \end{aligned}$$

Συνεπώς, θέλουμε να δείξουμε ότι η τιμή $f(3)$ βρίσκεται εντός του διαστήματος $(2, 6)$. Έχουμε ως δεδομένο ότι οι τιμές της f' βρίσκονται εντός του διαστήματος $(2, 4)$. Υποψιαζόμαστε λοιπόν ότι χρήση του ΘΜΤΔΛ μπορεί να μας δώσει την απάντηση: ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤΔΛ για την f στο διάστημα $[1, 3]$:

$$\exists\ \xi \in (1, 3)\ :\ f'(\xi) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1},$$

δηλαδή (αντικαθιστούμε $f(1) = 2$)

$$\exists\, \xi \in (1,3) \ : \ f'(\xi) = \frac{f(3) - 2}{2}.$$

Αλλά, $2 < f'(x) < 4$ για κάθε $x \in (1,3)$ και αρα $2 < f'(\xi) < 4$, συνεπώς η πιο πάνω δίνει

$$2 < \frac{f(3)-2}{2} < 4 \Rightarrow 4 < f(3) - 2 < 8 \Rightarrow 6 < f(3) < 10.$$

◀

(14) Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση τέτοιων με

$$h'(x) = 2f'(x) \cdot f(x) - 2g'(x) \cdot g(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

και από τις υποθέσεις,

$$h'(x) = 2g(x) \cdot g'(x) - 2g'(x) \cdot g(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Από γνωστό μας Πόρισμα (του ΘΜΤΔΛ) έχουμε ότι υπάρχει πραγματική σταθερά c τέτοια ώστε $h(x) = c, \ \forall x \in \mathbb{R}$ δηλαδή η συνάρτηση h είναι σταθερή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. ◀

¨Τα γραπτά του Bolzano (Μπολζάνο) σηματοδοτούν ένα σημείο καμπής στην έρευνα για τα θεμέλια των μαθηματικών-μια μετάβαση από το μαθηματικό στυλ του δέκατου όγδοου αιώνα σε αυτό του δέκατου ένατου [...]. Ο Bolzano ήταν ο πρώτος μαθηματικός που απέρριψε ρητά την παραδοσιακή γεωμετρική και χωρική προσέγγιση των θεμελίων, καλώντας αντ΄ αυτού, σε ρητά λογικούς λόγους, για μια ¨καθαρά αναλυτική' θεμελίωση του λογισμού - δηλαδή, μια βάση στην αριθμητική.'
(www.sophiararebooks.com)

Σχήμα 3: B. Bolzano