Διάλεξη

5

Ασύμπτωτη στο γράφημα συνάρτησης

- Θεωρία
- Βασικά παραδείγματα

3.5 Ασύμπτωτες συνάρτησης

Ορισμός 3.5.1. *(Ασύμπτωτες συνάρτησης)*

(i) *Λέμε ότι η* ***ευθεία*** *με εξίσωση $y = a$ είναι* ***οριζόντια ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης*** *f αν τουλάχιστον ένα από τα πιο κάτω ισχύει:*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a.$$

Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι η ευθεία $y = a$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης καθώς $x \to +\infty$ και στη δεύτερη λέμε ότι η ευθεία $y = a$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης καθώς $x \to -\infty$.

(ii) *Λέμε ότι η* ***ευθεία*** *$x = a$ είναι* ***κατακόρυφη ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης*** *f αν τουλάχιστον ένα από τα πιο κάτω ισχύει:*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty.$$

Στις δύο πρώτες περιπτώσεις όπου $x \to a^+$ λέμε ότι η ευθεία $x = a$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης από τα δεξιά και στη δεύτερη περίπτωση όπου $x \to a^-$ λέμε ότι η ευθεία είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης από τα αριστερά.

(iii) *Λέμε ότι η* ***ευθεία*** *με εξίσωση $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ είναι* ***πλάγια ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης*** *f αν*

$$\textit{είτε} \quad \lim_{x\to+\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0, \quad \textit{είτε} \quad \lim_{x\to-\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι η ευθεία $y = ax + b$ είναι πλάγια ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης καθώς $x \to +\infty$ και στη δεύτερη λέμε ότι η ευθεία $y = ax + b$ είναι πλάγια ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης καθώς $x \to -\infty$.

Οι πιο πάνω ορισμοί αναφέρονται σε ειδικές περιπτώσεις, όπου το γράφημα της συνάρτησης 'προσεγγίζει' (ασυμπτωτικά) έναν (πεπερασμένο) αριθμό (οριζόντια ασύμπτωτη) ή τείνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ (κατακόρυφη ασύμπτωτη) ή ότι ακόμα η συνάρτηση 'συμπεριφέρεται' οριακά ως πολυώνυμο βαθμού 1, δηλαδή ως γραμμική συνάρτηση (πλάγια ασύμπτωτη).
Τέτοιες προσεγγίσεις, ιδιαίτερα στην περίπτωση της γραμμικής προσέγγισης, είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στα Μαθηματικά. Γενικά όμως έχουμε:

Ορισμός 3.5.2. *(Ασύμπτωτη συνάρτησης) Μια* ***συνάρτηση*** *$y = g(x)$ καλείται* ***ασύμπτωτη*** *της συνάρτησης $y = f(x)$ αν*

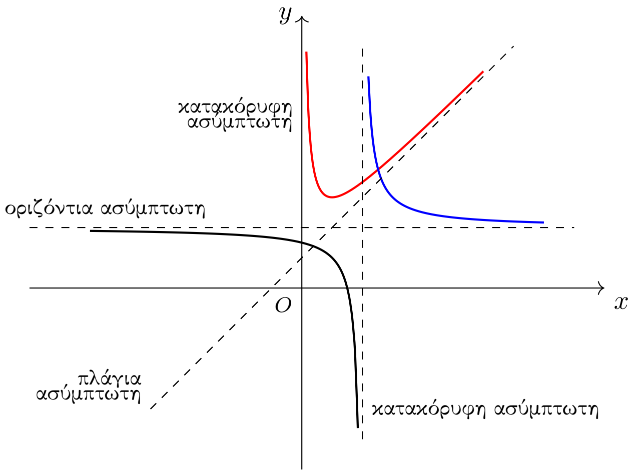
$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - g(x)] = 0,$$

ή αν

$$\lim_{x\to\pm a}[f(x) - g(x)] = \pm\infty$$

και $f(x) \neq g(x)$ σε μια κατάλληλη περιοχή του $x = a$.

Για την εύρεση πλάγιας ασύμπτωτης στο γράφημα μιας συνάρτησης έχουμε το ακόλουθο Θεώρημα:



Σχήμα 3.1: Οριζόντια, κατακόρυφη και πλάγια ασύμπτωτη.

Θεώρημα 3.5.1. *Αν είτε*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}\quad \textbf{και}\quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b\in\mathbb{R},$$

είτε

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}\quad \textbf{και}\quad \lim_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=b\in\mathbb{R},$$

τότε η ευθεία με εξίσωση $y=ax+b$ είναι (πλάγια) ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης f.

▶ **Παράδειγμα 3.5.1.** *Θα μελετήσουμε ως προς την ύπαρξη ασυμπτώτων τη συνάρτηση f με τύπο*

$$f(x)=x+\frac{\ln x}{x+1}.$$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0,+\infty)$. Ελέγχουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης στα άκρα του πεδίου ορισμού της:

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x+\frac{\ln x}{x+1}\right)=\lim_{x\to0^+}x+\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x+1}=-\infty,$$

αφού

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x+1}=-\infty.$$

Συνεπώς, το γράφημα της f **έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα των τετμημένων**.
Τώρα,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{\ln x}{x+1}\right)=+\infty,$$

αφού (π.χ. με χρήση κανόνα του De L' Hopital)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x+1}=0$$

και αρα **το γράφημα της f δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη.**
Τέλος,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\ln x}{x(x+1)}\right)=1+0=1,$$

αφού (π.χ. με χρήση κανόνα του De L' Hopital) είναι

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x(x+1)} = 0.$$

Τότε,

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (1 \cdot x)] = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x+1} = 0$$

(πάλι με χρήση κανόνα του De L' Hopital).
Έτσι, **η ευθεία με εξίσωση $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη του γραφήματος της f καθώς** $x \to +\infty$. ◀

▶ **Παρατηρήσεις 3.5.1.**

(i) *Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε* ***μπορεί να έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες****. Ένα παράδειγμα είναι η συνάρτηση $f(x) = 1/x$, $x \neq 0$. Είναι παντού συνεχής στο πεδίο ορισμού της και έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα των τεταγμένων. Αν όμως μια συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.*

(ii) *Από τον ορισμό της πλάγιας ασύμπτωτης προκύπτει ότι αν το γράφημα μιας συνάρτησης f έχει πλάγια ασύμπτωτη όταν $x \to +\infty$, τότε το όριο $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$.*

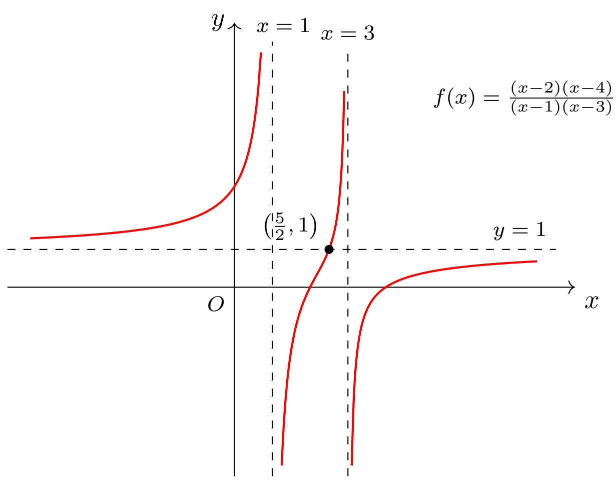
(iii) *Μπορεί η οριζόντια ασύμπτωτη να τέμνει το γράφημα της συνάρτησης, ακόμα και άπειρες φορές. Για παράδειγμα η συνάρτηση f με τύπο*

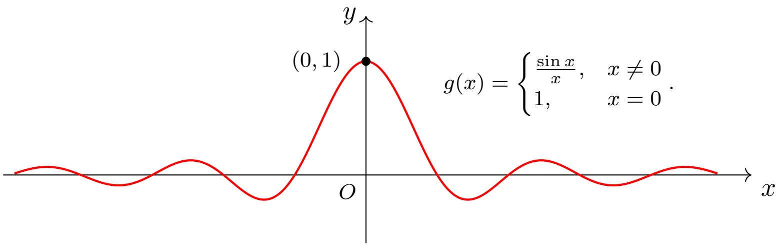
$$f(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-3)}, \quad x \neq 1, 3$$

έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x = 1$ και $x = 3$ και οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 1$ αλλά το σημείο $(5/2, 1)$ ανήκει στο γράφημά της και η συνάρτηση g με τύπο

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα των τετμημένων τον οποίο το γράφημά της τέμνει άπειρες φορές.
[Για αρκετά μεγάλο x, μπορούμε να βρούμε σημεία τέτοια ώστε η εικόνα τους μέσω της g να είναι θετική (π.χ. $x = (4n+1)/2\pi$, $n \in \mathbb{N}$ και σημεία τέτοια ώστε η εικόνα τους μέσω της g να είναι αρνητική (π.χ. $x = (4n+3)/2\pi$, $n \in \mathbb{N}$) και εφαρμόζουμε το Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής].

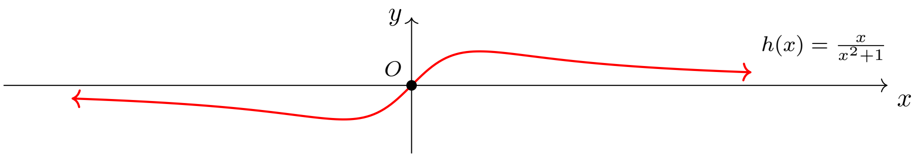




Ένα άλλο παράδειγμα όπου η οριζόντια ασύμπτωτη τέμνει το γράφημα της συνάρτησης σε ενα και μόνο σημείο είναι η

$$h(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

Ο άξονας των τετμημένων είναι οριζόντια ασύμπτωτη του γραφήματος της h καθώς $x \to \pm\infty$ και το σημείο $(0,0)$ ανήκει στο γράφημά της.



(iv) *Η πλάγια ασύμπτωτη της συνάρτησης μπορεί να τέμνει το γράφημά της. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση f του παραδείγματος 3.5.1. Η f έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y = x$, αλλά το σημείο $(0,0)$ ανήκει στο γράφημά της.*
Ιδιαίτερα, *η πλάγια ασύμπτωτη μπορεί να τέμνει το γράφημα της συνάρτησης άπειρες φορές.*

(v) *Αν το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης είναι κλειστό και φραγμένο διάστημα, τότε το γράφημά της δε θα έχει πλάγιες ασύμπτωτες, αφού αυτή θα είναι άνω και κάτω φραγμένη.*

Για τις αλγεβρικές συναρτήσεις[α΄] χρησιμοποιούμε τις γνωστές τεχνικές υπολογισμού ορίων.

[α΄] **Αλγεβρική** λέγεται μια συνάρτηση η οποία ικανοποιεί μια πολυωνυμική εξίσωση. Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι αυτές που μπορούν να κατασκευαστούν χρησιμοποιώντας μόνο στοιχειώδη πράξεις (πρόσθεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση) μαζί με την αντίστροφή τους (όπου αυτή υπάρχει) και ρητές δυνάμεις.

▶ **Παράδειγμα 3.5.2.** *Θα μελετήσουμε ως προς την ύπαρξη ασυμπτώτων τη συνάρτηση f με τύπο*

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x+2}.$$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R}$. Η f είναι παντού συνεχής (στο $\mathbb{R}$) και αρα το γράφημα της f **δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.**
Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+2e^{-x}} = 1$$

και

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+2} = 0$$

και αρα το γράφημα της f **έχει οριζόντια ασύμπτωτη καθώς** $x \to -\infty$ **τον άξονα των τεταγμένων και την ευθεία** $y = 1$ **καθώς** $x \to +\infty$. ◀

▶ **Παράδειγμα 3.5.3.** *Θα μελετήσουμε ως προς την ύπαρξη ασυμπτώτων τη συνάρτηση f με τύπο*

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

Λύση: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R}_* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
Είναι

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

και

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x + \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

και αρα το γράφημα της f **δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.**
Τώρα,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(x + \frac{1}{x} \right) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

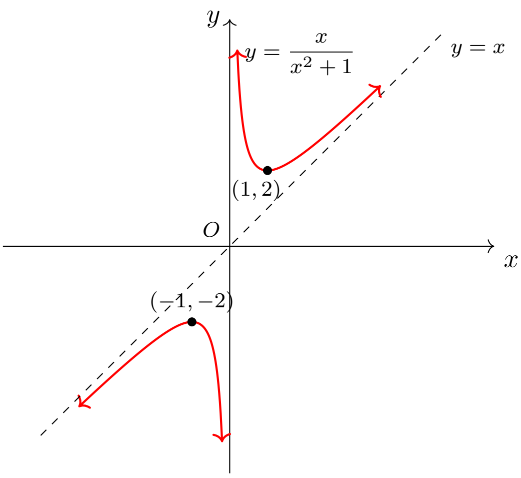
και αρα **ο άξονας των τεταγμένων είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη του γραφήματος της f εκατέρωθεν του $x = 0$.**
Τώρα,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

και

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Έτσι, η ευθεία $y = x$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη του γραφήματος της f καθώς $x \to +\infty$.** Ομοίως (ή λόγω συμμετρίας) βρίσκουμε ότι η ευθεία $y = x$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη του γραφήματος της f καθώς $x \to -\infty$.**



◀

▶ **Παράδειγμα 3.5.4.** *Θα μελετήσουμε ως προς την ύπαρξη ασυμπτώτων τη συνάρτηση f με τύπο*

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x.$$

Λύση: Κατ΄ αρχάς, αφού $x^2 + x \geq 0,\ \forall x \geq 0$, έχουμε ότι $f(x) \in \mathbb{R},\ \forall x \geq 0$, δηλαδή για αρκετά μεγάλες τιμές του x, οι αντίστοιχες τιμές της παράστασης $\sqrt{x^2+1} - x$ είναι πραγματικές. Έχουμε

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)\cdot(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} \\
&\stackrel{x\geq>}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Άρα, η ευθεία με εξίσωση $y = 1/2$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** του γραφήματος της συνάρτησης σε μια περιοχή του $+\infty$.

Θα μελετήσουμε τώρα τη συμπεριφορά της f στο $-\infty$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)\cdot(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} \\
&\stackrel{x\leq<}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-\sqrt{1+\frac{1}{x}}} \\
&= +\infty
\end{aligned}
$$

και αρα το γράφημα της f **δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη** σε καμία περιοχή του $-\infty$.

Μένει να μελετήσουμε την ύπαρξη πλάγιας ασύμπτωτης (προφανώς σε περιοχή του $-\infty$). Έχουμε

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)\cdot(\sqrt{x^2+x}+x)}{x(\sqrt{x^2+x}+x)} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}+x}.
\end{aligned}
$$

Όπως και προηγουμένως, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x) = -\frac{1}{2}.$$

Τότε

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = -2.$$

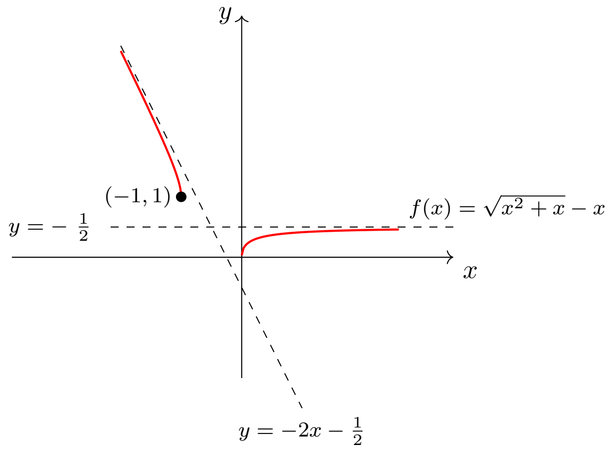
Πιο απλά,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{x^2+x}-x}{x} \\
&\stackrel{x\leq<}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}{x} = -\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right) = -2.
\end{aligned}
$$

Τώρα,

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-2x)] = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x) = -\frac{1}{2}$$

από πρίν. Έπεται ότι η ευθεία με εξίσωση $y = -2x - \frac{1}{2}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** του γραφήματος της f σε μια περιοχή του $-\infty$. ◀



Ένα άλλο παράδειγμα είναι η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}.$$

Η συνάρτηση αυτή αποτελεί επίσης παράδειγμα συνάρτησης f της οποίας το γράφημα έχει ασύμπτωτη παρ΄ όλο που

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Πράγματι, όπως εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+x+1} = +\infty.$$

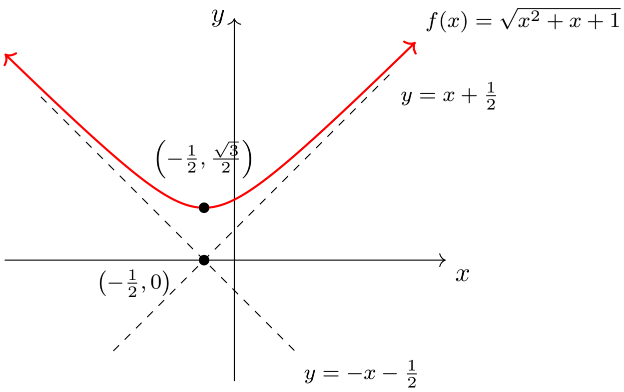
Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής. Ψάχνουμε λοιπόν αν το γράφημα της f έχει πλάγια/ες ασύμπτωτη/ες.
Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x} \\
&\overset{x>0}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1.
\end{aligned}$$

Ακολούθως, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} [f(x) - 1\cdot x] &= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x} \\
&\overset{x>0}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η ευθεία με εξίσωση $y = x + \frac{1}{2}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** του γραφήματος της f σε μια περιοχή του $+\infty$.
Εντελώς όμοια (ή λόγω συμμετρίας) βρίσκουμε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = -x - \frac{1}{2}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** του γραφήματος της f σε μια περιοχή του $-\infty$.



3.5.1 Ασύμπτωτη ρητής συνάρτησης

Έστω f μια ρητή συνάρτηση, δηλ. της μορφής $f = P/Q$ όπου P και Q πολυώνυμα χωρίς κοινές ρίζες. Τότε, οι ευθείες της μορφής $x = x_0$, όπου $x_0 \in \{Q(x) = 0\}$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες του γραφήματος της συνάρτησης.

Για τη μελέτη ύπαρξης οριζόντιας και πλάγιας ασύμπτωτης, διακρίνουμε τρείς περιπτώσεις, ανάλογα με το βαθμό των πολυωνύμων του αριθμητή και παρονομαστή:

(i) $\deg(P) < \deg(Q)$.
Διαισθητικά, αν ο βαθμός του αριθμητή είναι (γνήσια) μικρότερος από το βαθμό του παρονομαστή, δηλ. ο παρονομαστής 'υπερισχύει' του αριθμητή, αναμένουμε αυτός να 'έλκει' το γράφημα της συνάρτησης στην αρχή των αξόνων δίνοντάς μας έτσι **μια οριζόντια ασύμπτωτη: τον άξονα των τετμημένων**. Πράγματι,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0.$$

(ii) $\deg(P) = \deg(Q)$.
Γράφουμε

$$P(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0$$

και

$$Q(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0,$$

όπου $a_m, b_m \neq 0$. Τότε

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{a_m}{b_m}$$

και αρα η ευθεία $y = a_m/b_m$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη του γραφήματος της** f.

(iii) $\deg(P) > \deg(Q)$.
Διαισθητικά, αν ο βαθμός του αριθμητή είναι (γνήσια) μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή, δηλ. ο αριθμητής 'υπερισχύει' του παρονομαστή, αναμένουμε αυτός να 'έλκει' το γράφημα της συνάρτησης μακριά από τον άξονα των τετμημένων ή από οποιαδήποτε άλλη σταθεροποιημένη τιμή στον άξονα των τεταγμένων. Πράγματι, εκτελώντας τη διαίρεση P/Q,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{B(x)}{Q(x)},$$

όπου $\deg(A) = 1$ και $\deg(B) < \deg(P)$, τότε

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - A(x)] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{B(x)}{Q(x)} = 0$$

και αρα, **η ευθεία** $y = A(x)$ **είναι πλάγια ασύμπτωτη του γραφήματος της** f.

Έστω $f = P/Q$ όπου P και Q πολυώνυμα. Τότε:

(i) Αν $\deg(P) < \deg(Q)$, τότε ο άξονας των τετμημένων είναι **οριζόντια ασύμπτωτη του γραφήματος της** f.

(ii) Αν $\deg(P) = \deg(Q)$, τότε η ευθεία $y = a/b$, όπου a είναι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του P και b είναι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του Q είναι **οριζόντια ασύμπτωτη του γραφήματος της** f.

(iii) Αν $\deg(P) > \deg(Q)$, τότε το γράφημα της f **δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες**. Συγκεκριμένα, αν $\deg(P) = \deg(Q) + 1$, τότε το γράφημά της έχει πλάγια ασύμπτωτη, η οποία ευρίσκεται από τη διαίρεση P/Q :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{B(x)}{Q(x)},$$

τότε $\deg(A) = 1$ και $\deg(B) < \deg(P)$ και η ευθεία $y = A(x)$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη.

Αποδεικνύεται ότι οι ρητές συναρτήσεις, με βαθμό του πολυωνύμου του αριθμητή μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του πολυωνύμου στον παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

Άσκηση 3.5.1. *Να βρεθούν οι ασύμπτωτες των πιο κάτω ρητών συναρτήσεων:*

(i) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$

(ii) $g(x) = \dfrac{x^2+3x+3}{x-3}$

(iii) $h(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$

(iv) $i(x) = \dfrac{3x+1}{2x-1}$

(v) $j(x) = \dfrac{x^2+4}{x+1}$

(vi) $k(x) = \dfrac{x^2-x}{x^2-6x+5}$

Λύση:

(i) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$.
Το πεδίο ορισμού της **ρητής** αυτής συνάρτησης είναι το $\mathbb{R} - \{1\}$ και αρα η ευθεία $x = 1$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη του γραφήματος της** f. Αφού $\deg(x+2) = 1 = \deg(x-1)$, έπεται ότι η ευθεία $y = \frac{1}{1} = 1$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη του γραφήματος της** f **καθώς** $x \to \pm\infty$.

(ii) $g(x) = \dfrac{x^2+3x+3}{x-3}$.
Το πεδίο ορισμού της **ρητής** αυτής συνάρτησης είναι το $\mathbb{R} - \{3\}$ και αρα η ευθεία $x = 3$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη του γραφήματος της** g. Αφού $\deg(x^2 + 3x + 3) = 2 = \deg(x-3) + 1$, εκτελούμε τη διαίρεση

$$\frac{x^2+3x+3}{x-3} = (x+6) + \frac{21}{x-3}.$$

Τότε
$$g(x) - (x+6) = \frac{21}{x-3}$$
και αρα
$$\lim_{x\to+\infty}[g(x) - (x+6)] = 0.$$
Συνεπώς, η ευθεία με εξίσωση $y = x+6$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη του γραφήματος της** g.

(iii) $h(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-2} = \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \dfrac{x+3}{x+2},\ x \neq -2, 1.$
Το πεδίο ορισμού της **ρητής** αυτής συνάρτησης είναι το $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$. Όμως, το $x = -1$ είναι κοινή ρίζα αριθμητή και παρονομαστή. Η ευθεία $x = -2$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη του γραφήματός της**.
Επίσης, αφού
$$\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2} = 1,$$
έπεται ότι **η ευθεία** $y = 1$ **είναι οριζόντια ασύμπτωτη του γραφήματος της** h **καθώς** $x \to \pm\infty$.

(iv) $i(x) = \dfrac{3x+1}{2x-1}.$
Το πεδίο ορισμού της **ρητής** αυτής συνάρτησης είναι το $\mathbb{R} - \{1/2\}$ και αρα η ευθεία $x = 1/2$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη του γραφήματός της**. Αφού $\deg(3x+1) = 1 = \deg(2x-1)$, έπεται ότι **η ευθεία** $y = 3/2$ **είναι οριζόντια ασύμπτωτη του γραφήματός της καθώς** $x \to \pm\infty$**.**

(v) $j(x) = \dfrac{x^2+4}{x+1}.$
Το πεδίο ορισμού της **ρητής** αυτής συνάρτησης είναι το $\mathbb{R} - \{-1\}$ και αρα η ευθεία $x = -1$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη του γραφήματός της**. Αφού $\deg(x^2+4) = 2 = \deg(x+1)+1$, εκτελούμε τη διαίρεση
$$\frac{x^2+4}{x+1} = (x-1) + \frac{5}{x+1}.$$
Τότε
$$j(x) - (x+1) = \frac{5}{x+1}$$
και αρα
$$\lim_{x\to+\infty}[j(x) - (x+1)] = 0.$$
Συνεπώς, η ευθεία με εξίσωση $y = x+1$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη του γραφήματος της** j.

(vi) $k(x) = \dfrac{x^2-x}{x^2-6x+5} = \dfrac{x(x-1)}{(x-5)(x-1)} = \dfrac{x}{x-5},\ x \neq 1, 5.$
Το πεδίο ορισμού της **ρητής** αυτής συνάρτησης είναι το $\mathbb{R} - \{1, 5\}$. Όμως, το $x = 1$ είναι κοινή ρίζα αριθμητή και παρονομαστή. Η ευθεία $x = 5$ είναι λοιπόν **κατακόρυφη ασύμπτωτη του γραφήματός της**.
Επίσης, αφού
$$\lim_{x\to\pm\infty} k(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(x-1)}{(x-5)(x-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-5} = 1,$$
έπεται ότι **η ευθεία** $y = 1$ **είναι οριζόντια ασύμπτωτη του γραφήματος της** k **καθώς** $x \to \pm\infty$.

3.5.2 Ασκήσεις

$\boxed{1.}$ Να μελετηθεί ως προς την ύπαρξη ασύμπτωτων το γράφημα της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5}.$$

$\boxed{2.}$ Για μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$7x + 3 \leq f(x) \leq \frac{7x^3 + 3x^2 + 1}{x^2}.$$

Να εξεταστεί κατά πόσο το γράφημα της συνάρτησης f έχει πλάγια ασύμπτωτη.

$\boxed{3.}$ Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί a, b και c ώστε οι ευθείες με εξίσωση $x = -2$ και $y = x - 4$ να είναι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x) = \frac{(a-2)x^3 + bx^2 - cx + 1}{2x + c}.$$

$\boxed{4.}$ Να μελετηθεί ως προς την ύπαρξη ασύμπτωτων το γράφημα της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \geq 1 \\ \dfrac{1}{x-1}, & x < 1 \end{cases}.$$

$\boxed{5.}$ Υπάρχει συνάρτηση της οποίας το γράφημα έχει οριζόντια **και** πλάγια ασύμπτωτη καθώς $x \to +\infty$;

$\boxed{6.}$ Δώστε παράδειγμα συνάρτησης της οποίας το γράφημα έχει δύο οριζόντιες ασύμπτωτες και εξηγήστε γιατί το γράφημα μιας συνάρτησης δεν μπορεί να έχει περισσότερες από δύο οριζόντιες ασύμπτωτες.

$\boxed{7.}$ Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση της οποίας το γράφημα έχει οριζόντια ασύμπτωτη καθώς $x \to \pm\infty$. Να δείξετε ότι η f έχει σταθερό σημείο, δηλαδή ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$.

$\boxed{8.}$ Να βρεθούν οι ασύμπτωτες των πιο κάτω ρητών συναρτήσεων:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+2}, \qquad g(x) = \frac{x^5 - 1}{x(x^2-2)} \qquad \text{και} \qquad h(x) = \frac{-x^4 - x^2 + 2x}{x^2 - 1}.$$

Τί συμπεράσματα μπορείτε να βγάλετε για τη 'συμπεριοφορά' του γραφήματος κάθε μιάς από τις πιο πάνω συναρτήσεις καθώς $x \to \pm\infty$;

3.5.3 Λύσεις

$\boxed{1.}$ Εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 5} = +\infty.$$

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής. Ψάχνουμε λοιπόν αν το γράφημα της f έχει πλάγια/ες ασύμπτωτη/ες.

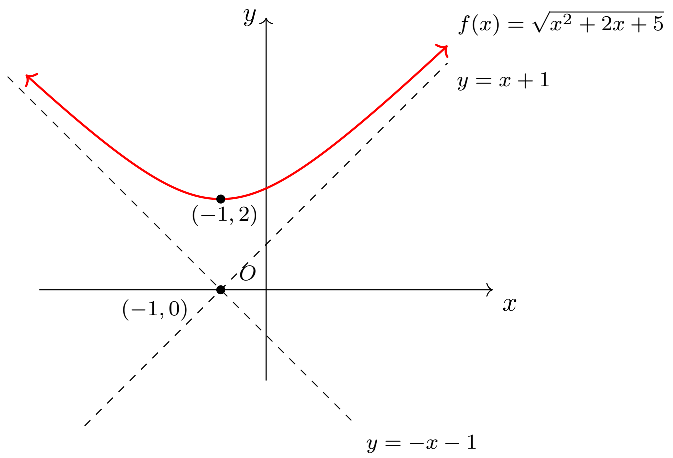
Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x} \\
&\overset{x>\geq 0}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}} = 1.
\end{aligned}$$

Ακολούθως, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}[f(x)-1\cdot x] &= \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x+5}-x) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x+5}-x)\cdot(\sqrt{x^2+2x+5}+x)}{\sqrt{x^2+2x+5}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5}{\sqrt{x^2+2x+5}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\frac{5}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+x} \\
&\overset{x>\geq 0}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\frac{5}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1} \\
&= \frac{2}{2} = 1.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η ευθεία με εξίσωση $y = x + \frac{1}{2}$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** του γραφήματος της f καθώς $+\infty$.
Εντελώς όμοια (ή λόγω συμμετρίας) βρίσκουμε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = -x - 1$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** του γραφήματος της f καθώς $-\infty$.



2. Για κάθε $x > 0$,

$$7+\frac{3}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq 7+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}$$

και αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\left(7+\frac{3}{x}\right) = 7 = \lim_{x\to+\infty}\left(7+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}\right),$$

από το κριτήριο παρεμβολής,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 7.$$

Τώρα, για $x > 0$,

$$3 \leq f(x) - 7x \leq 3 + \frac{1}{x^2}$$

και άρα

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - 7x] = 3.$$

Έτσι, το γράφημα της συνάρτησης έχει πλάγια ασύμπτωτη καθώς $x \to +\infty$ την ευθεία με εξίσωση $y = 7x+3$. Ομοίως βρίσκουμε ότι το γράφημα της συνάρτησης έχει πλάγια ασύμπτωτη καθώς $x \to -\infty$ την ίδια ευθεία.

3. Αφού η συνάρτηση είναι ρητή, η ευθεία με εξίσωση $x = -2$ είναι (κατακόρυφη) ασύμπτωτη του γραφήματός της αν και μόνο αν είναι ρίζα της παράστασης του παρονομαστή και όχι του αριθμητή. Είναι ρίζα του παρονομαστή αν και μόνο αν $2(-2) + c = 0 \Leftrightarrow \boxed{c = 4}$.
Για $c = 4$, η παράσταση στον αριθμητή γίνεται $(a - 2)x^3 + bx^2 - 4x + 1$.
Η ευθεία με εξίσωση $y = x - 4$ είναι (πλάγια) ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f αν και μόνο αν είτε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to+\infty}[f(x) - x] = -4,$$

είτε

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 1 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to-\infty}[f(x) - x] = -4.$$

Για την πρώτη περίπτωση,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{(a-2)x^2 + bx - 4 + \frac{1}{x}}{2x+4}\\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{(a-2)x^2 + bx - 4 + \frac{1}{x}}{x+2} = 2\\ &\Leftrightarrow \quad \boxed{a = 2 = b}\,.\end{aligned}$$

Για τις τιμές αυτές των a, b και c που βρήκαμε, εύκολα επαληθεύεται ότι

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - x] = -4.$$

Στην περίπτωση αυτή, η συνάρτηση είναι η

$$\boxed{f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{2(x+2)}}\,.$$

Ομοίως και η δεύτερη περίπτωση.

4. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R}$. Εύκολα βλέπουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο $x = 1$. Ελέγχουμε τη συμπεριφορά της f εκατέρωθεν του σημείου αυτού:

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}\frac{1}{x-1} = -\infty$$

και

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}(2x+1) = 3.$$

Έτσι, η ευθεία με εξίσωση $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης από τα αριστερά.

Ελέγχουμε τώρα την (ασυμπτωτική) συμπεριφορά της συνάρτησης καθώς $x \to \pm\infty$:
Είναι

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \lim_{x\to+\infty} (2x+1) = +\infty$$

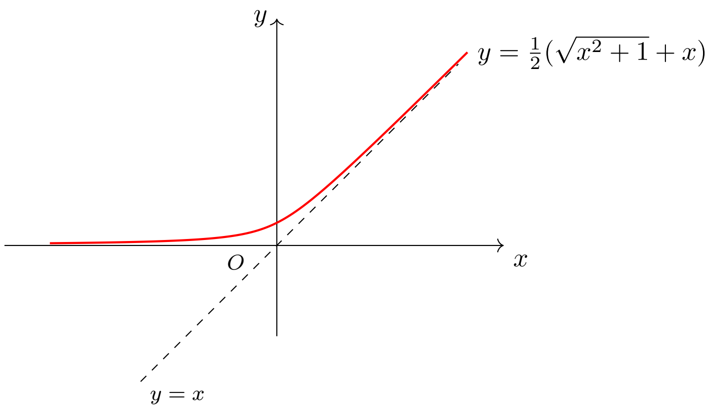
και αρα ο άξονας των τετμημένων είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** του γραφήματος της συνάρτησης καθώς $x \to -\infty$.

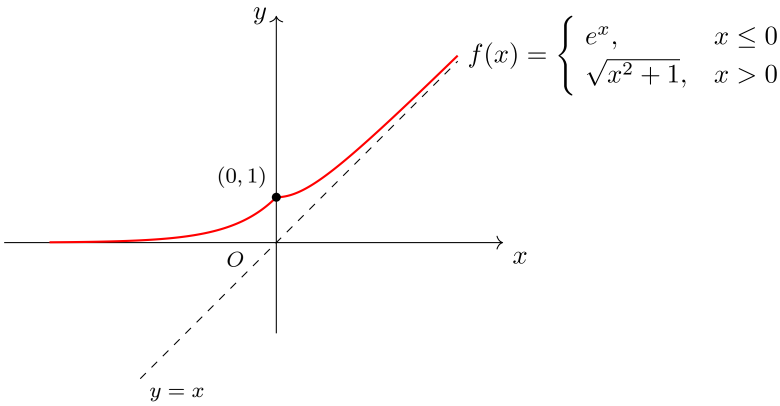
$\boxed{\mathbf{5.}}$ Ναι. Για παράδειγμα η f με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x^2+1} + x)$$

έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα των τετμημένων καθώς $x \to -\infty$ και πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y = x$.
Αλλά και η g με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \le 0 \\ \sqrt{x^2+1}, & x > 0 \end{cases}.$$





$\boxed{\mathbf{6.}}$ Ένα παράδειγμα συνάρτησης της οποίας το γράφημα έχει (ακριβώς) δύο οριζόντιες ασύμπτωτες είναι η f με τύπο

$$f(x) = \text{τοξεφ}x$$

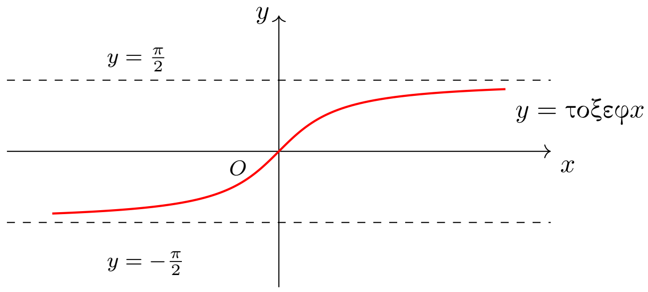
της οποίας το γράφημα έχει οριζόντιες ασύμπτωτες τις ευθείες με εξίσωση $y = -\pi/2$ και $y = -\pi/2$.

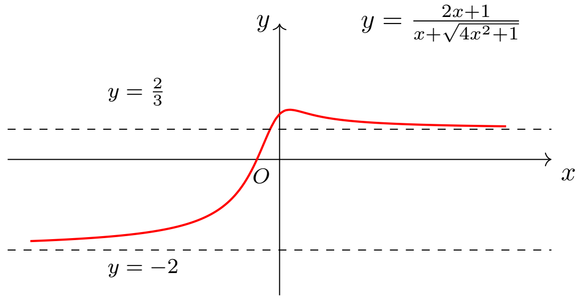
Ένα άλλο παράδειγμα είναι η g με τύπο

$$g(x) = \frac{2x+1}{x+\sqrt{4x^2+1}}.$$

Όπως εύκολα μπορούμε να δούμε, το γράφημά της έχει οριζόντιες ασύμπτωτες τις ευθείες με εξίσωση $y = 2/3$ και $y = -2$.

Το ότι το γράφημα μιας συνάρτησης δεν μπορεί να έχει περισσότερες από δύο οριζόντιες ασύμπτωτες προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της οριζόντιας ασύμπτωτης.





7. Αφού το γράφημα της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη καθώς $x \to +\infty$ και καθώς $x \to -\infty$, τα όρια $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ είναι πεπερασμένα.
Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x) = f(x) - x$. Τότε,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$$

και αφού g συνεχής, από το Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$, δηλαδή $f(\xi) = \xi$.

8. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$
Η ευθεία με εξίσωση $x = -2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη εκατέρωθεν του $x = 2$ και η ευθεία με εξίσωση $y = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη καθώς $x \to \pm\infty$ του γραφήματος της f.
Για μεγάλα και μικρά x, το γράφημα της συνάρτησης συμπεριφέρεται σαν το γράφημα της συνάρτησης $y = 2$.

$$g(x) = \frac{x^5-1}{x(x^2-2)} = \frac{x^5-1}{x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}.$$

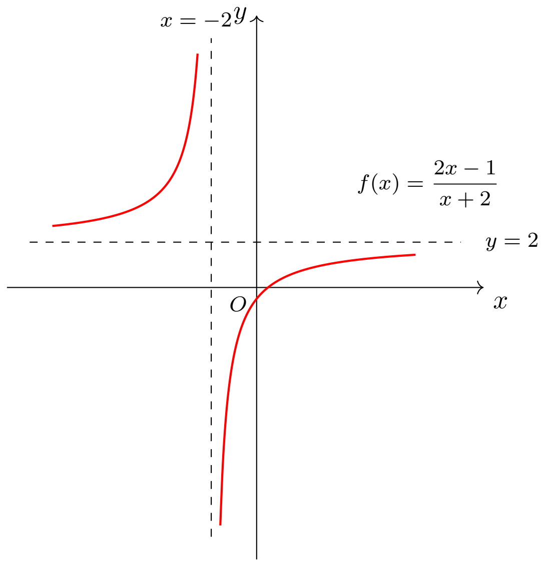
Οι ευθείες με εξίσωση $x = 0,\ x = \sqrt{3}$ και $x = -\sqrt{3}$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες εκατέρωθεν του $x = 0,\ x = \sqrt{3}$ και $x = -\sqrt{3}$ αντίστοιχα.
Είναι

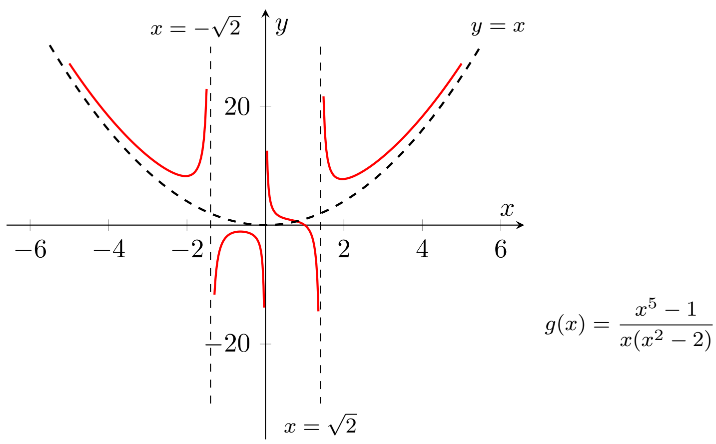
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^5-1}{x(x^2-2)} = +\infty$$

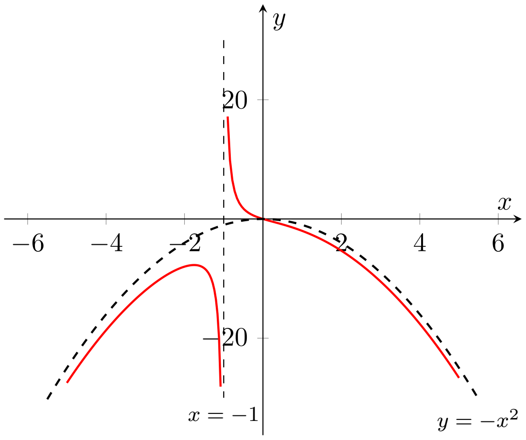
και αρα το γράφημα της f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.
Για μεγάλα και μικρά x, το γράφημα της συνάρτησης συμπεριφέρεται σαν το γράφημα της συνάρτησης $y = x^2$.

$$h(x) \quad = \quad \frac{-x^4 - x^2 + 2x}{x^2 - 1} = -x^2 - 2 + \frac{2}{x+1},\ x \neq \pm 1.$$

Συνεπώς, η ευθεία με εξίσωση $x = -1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη του γραφήματος της f. Αφού ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι κατά δύο μεγαλύτερος του βαθμού του πολυωνύμου του παρονομαστή, το γράφημα της f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.
Για μεγάλα και μικρά x, το γράφημα της συνάρτησης συμπεριφέρεται σαν το γράφημα της συνάρτησης $y = -x^2$.







$$h(x) = \frac{-x^4 - x^2 + 2x}{x^2 - 1}$$