Ασκήσεις 2.4 [Εφαρμογές των παραγώγων]

Από το βιβλίο:
- Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού (Κύπρου) - Μαθηματικά Επιλογής Γ' Ενιαίου Λυκείου, Γ' έκδοση, 2007, Ανατύπωση 2016

1. Να βρείτε την κλίση και την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης με τύπο:

(α) $y = x^2$ στο σημείο της με $x = -2$.

(β) $y = \frac{1}{x}$ στο σημείο της με $x = \frac{1}{2}$.

(γ) $y = \eta\mu(2x)$ στο σημείο της με $x = \frac{\pi}{2}$.

2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης $x^2 + y^2 = 17$ στο σημείο της $A(1,4)$.

3. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της $A(\alpha\sigma\upsilon\nu\theta, \beta\eta\mu\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi$ είναι η $(\beta\sigma\upsilon\nu\theta)x + (\alpha\eta\mu\theta)y = \alpha\beta$.

4. Να υπολογίσετε τα όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^{10}-1}$ (β) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{4}}{\sqrt{x}-2}$ (γ) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)}{x^3+x-10}$

(δ) $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sigma\upsilon\nu^2\theta}{1-\eta\mu\theta}$ (ε) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\ln(\eta\mu x)}$ (στ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-\sigma\upsilon\nu(2x)}{e^{3x}-\sigma\upsilon\nu(3x)}$

(ζ) $\lim\limits_{x\to -\infty} xe^x$ (η) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2e^{-x^2}$ (θ) $\lim\limits_{x\to 0} x^2e^{\frac{1}{x^2}}$

(ι) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)$ (ια) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}$ (ιβ) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\sqrt[x]{e}$

5. Αν $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\sigma\upsilon\nu\,(kx)} = \frac{1}{8}$, να υπολογίσετε την τιμή του k.

Λύσεις

1. (α) $y = x^2$ στο σημείο της με $x = -2$. Είναι $y(-2) = 4$ και για κάθε $x \in \mathbb{R} : \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-2} = -4$ και αρα η εξίσωση τη εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της αυτό είναι η $y - 4 = -4(x + 2)$ δηλ. η $y + 4x - 12 = 0$.

(β) $y = \frac{1}{x}$ στο σημείο της με $x = \frac{1}{2}$. Είναι $y\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ και για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{1}{2}} = -4$$

και αρα η εξίσωση τη εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της αυτό είναι η $y - 2 = -4\left(x + \frac{1}{2}\right)$ δηλ. η $y = -4x$.

(γ) $y = \eta\mu(2x)$ στο σημείο της με $x = \frac{\pi}{2}$. Είναι $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu(\pi) = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R} : \frac{dy}{dx} = 2\sigma\upsilon\nu(2x) \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{2}} = 2\sigma\upsilon\nu(\pi) = -2$ και αρα η εξίσωση τη εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της αυτό είναι η $y - \frac{\pi}{2} = -2(x - \pi)$ δηλ. η $2y + 2x - 3\pi = 0$.

2. Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα: (για $y \neq 0$)

$$x^2 + y^2 = 17 \Leftrightarrow \frac{d(x^2 + y^2)}{dx} = \frac{d(17)}{dx} \Leftrightarrow \frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(y^2)}{dx} = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της $A(1,4)$ είναι η

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{A(1,4)} = -\frac{1}{4}$$

και αρα η εξίσωση τη εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της αυτό είναι η $y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 1)$, δηλ. η

$$4y + x + 17 = 0$$

Τώρα, $\lambda_{\kappa\alpha\theta.} \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Rightarrow \lambda_{\kappa\alpha\theta.} = 4$ και αρα η εξίσωση τη κάθετης της καμπύλης στο σημείο της αυτό είναι η $y - 4 = 4(x - 1)$, δηλ. η $y = 4x$.

3. Για κάθε $\theta \in [0,2\pi]$ είναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = \frac{(\alpha\sigma\upsilon\nu\theta)^2}{\alpha^2} + \frac{(\beta\eta\mu\theta)^2}{\beta^2} = \frac{\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\alpha^2} + \frac{\beta^2\eta\mu^2\theta}{\beta^2} = \sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1$$

και αρα το σημείο $A(\alpha\sigma\upsilon\nu\theta, \beta\eta\mu\theta)$ ανήκει στην καμπύλη. Παραγωγίζοντας πεπλεγμένα την εξίσωση της καμπύλης, έχουμε

$$\frac{2}{\alpha^2}x + \frac{2}{\beta^2}y\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \frac{x}{y}$$

και στο σημείο $A\left(\underbrace{\alpha\sigma\upsilon\nu\theta}_{x(t)}, \underbrace{\beta\eta\mu\theta}_{y(t)}\right)$ είναι

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha\sigma\upsilon\nu\theta}{\beta\eta\mu t} = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu t}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο A είναι (για $\theta \neq \pm\pi$)

$$y - \beta\eta\mu\theta = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}(x - \alpha\sigma\upsilon\nu\theta) \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha\eta\mu\theta(y - \alpha\sigma\upsilon\nu\theta) = -\beta\sigma\upsilon\nu\theta(x - \alpha\sigma\upsilon\nu\theta)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\alpha\eta\mu\theta)y - \alpha\beta\eta\mu^2\theta = -(\beta\sigma\upsilon\nu\theta)x + \alpha\beta\sigma\upsilon\nu^2\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad (\alpha\eta\mu\theta)y + (\beta\sigma\upsilon\nu\theta)x = \alpha\beta(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\alpha\eta\mu\theta)y + (\beta\sigma\upsilon\nu\theta)x = \alpha\beta$$

4. (α) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^{10}-1}$

Είναι

$$\lim_{x\to 1}(x-1) = 1-1 = 0 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \lim_{x\to 0}(x^{10}-1) = 1-1 = 0$$

και αρα το $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^{10}-1}$ αποτελεί απροσδιοριστία τύπου $\frac{0}{0}$. Εφαρμόζουμε τον κανόνα του DeL'Hospital:

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^{10}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(x^{10}-1)'} = \frac{1}{10}\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^9} = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1^9} = \frac{1}{10}}$$

(β) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{4}}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to 4}\frac{x^{\frac{1}{3}}-4^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}-2}$

Είναι

$$\lim_{x\to 4}\left(x^{\frac{1}{3}}-4^{\frac{1}{3}}\right) = 4^{\frac{1}{3}}-4^{\frac{1}{3}} = 0 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \lim_{x\to 4}\left(\sqrt{x}-2\right) = 2-2 = 0$$

και αρα το $\lim_{x\to 4}\frac{x^{\frac{1}{3}}-4^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}-2}$ αποτελεί απροσδιοριστία τύπου $\frac{0}{0}$. Εφαρμόζουμε τον κανόνα του DeL'Hospital:

$$\boxed{\lim_{x\to 4}\frac{x^{\frac{1}{3}}-4^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}-2} = \lim_{x\to 4}\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}-4^{\frac{1}{3}}\right)'}{\left(x^{\frac{1}{2}}-2\right)'} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 4}\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 4}\frac{1}{x^{\frac{1}{6}}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4^{\frac{1}{6}}} = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3}}$$

(γ) $\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)}{x^3+x-10}$

Είναι

$$\lim_{x\to 2}\ln(x-1) = \ln 1 = 0 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \lim_{x\to 2}(x^3+x-10) = 8+2-10 = 0$$

και αρα το $\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)}{x^3+x-10}$ αποτελεί απροσδιοριστία τύπου $\frac{0}{0}$. Εφαρμόζουμε τον κανόνα του DeL'Hospital:

$$\boxed{\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)}{x^3+x-10} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x-1}}{3x^2+1} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{(3x^2+1)(x-1)} = \frac{1}{(3\cdot 2^2+1)(2-1)} = \frac{1}{13}}$$

(δ) $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sigma\upsilon\nu^2\theta}{1-\eta\mu\theta} = 2\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta}{1-\eta\mu\theta}$

Είναι

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} συν^2\theta = \left(\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} συν\theta\right)^2 = \left(συν\frac{\pi}{2}\right)^2 = 0 \;\; και \;\; \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(1-ημ\theta) = 1 - ημ\frac{\pi}{2} = 1 - 1 = 0$$

και αρα το $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{συν^2\theta}{1-ημ\theta}$ αποτελεί απροσδιοριστία τύπου $\frac{0}{0}$. Εφαρμόζουμε τον κανόνα του DeL'Hospital:

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{συν^2\theta}{1-ημ\theta} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{(συν^2\theta)'}{(1-ημ\theta)'} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{-2ημ\theta συν\theta}{-συν\theta} = 2\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} ημ\theta = 2ημ\frac{\pi}{2} = 2$$

και αρα

$$\boxed{\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{2συν^2\theta}{1-ημ\theta} = 4}$$

(ε) $\lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\ln(ημx)}$

Είναι

$$\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty \;\; και \;\; \lim_{x\to0^+} \ln(ημx) = -\infty$$

και αρα το $\lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\ln(ημx)}$ αποτελεί απροσδιοριστία τύπου $\frac{-\infty}{-\infty}$. Εφαρμόζουμε τον κανόνα του DeL'Hospital:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\ln(ημx)} = \lim_{x\to0^+} \frac{(\ln x)'}{(\ln(ημx))'} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{συνx}{ημx}} = \lim_{x\to0^+} \frac{ημx}{xσυνx}$$

το οποίο είναι αποτελεί απροσδιοριστία τύπου $\frac{0}{0}$. Εφαρμόζουμε τον κανόνα του DeL'Hospital:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{ημx}{xσυνx} = \lim_{x\to0^+} \frac{(ημx)'}{(xσυνx)'} = \lim_{x\to0^+} \frac{συνx}{συνx - xημx} = \frac{συν0}{συν0 - 0ημ0} = 1$$

Διαφορετικά,

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\ln(ημx)} = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\ln(ημx) + \ln x - \ln x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\ln\left(\frac{ημx}{x}\right) + \ln x} = \frac{1}{\lim_{x\to0^+} \frac{\ln\left(\frac{ημx}{x}\right) + \ln x}{\ln x}}$$

Είναι

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln\left(\frac{ημx}{x}\right) + \ln x}{\ln x} = \lim_{x\to0^+} \left(1 + \frac{\ln\left(\frac{ημx}{x}\right)}{\ln x}\right)$$

Αλλά, αφού

$$\lim_{x\to0^+} \ln\left(\frac{ημx}{x}\right) = \ln\left(\lim_{x\to0^+} \frac{ημx}{x}\right) = \ln 1 = 0$$

και

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$$

επεται ότι

$$\lim_{x\to0^+} \left(\frac{\ln\left(\frac{ημx}{x}\right)}{\ln x}\right) = \lim_{x\to0^+} \left(\ln\left(\frac{ημx}{x}\right)\right) \lim_{x\to0^+} \left(\frac{\ln\left(\frac{ημx}{x}\right)}{\ln x}\right) = 0$$

Συνεπώς,

$$\boxed{\lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\ln(ημx)} = 1}$$

(στ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-\sigma\upsilon\nu(2x)}{e^{3x}-\sigma\upsilon\nu(3x)}$

Είναι

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{2x}-\sigma\upsilon\nu(2x)\right)=e^0-\sigma\upsilon\nu 0=0 \ \kappa\alpha\iota\ \lim_{x\to 0}\left(e^{3x}-\sigma\upsilon\nu(3x)\right)=e^0-\sigma\upsilon\nu 0=0$$

και αρα το $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-\sigma\upsilon\nu\,(2x)}{e^{3x}-\sigma\upsilon\nu\,(3x)}$ αποτελεί απροσδιοριστία τύπου $\frac{0}{0}$. Εφαρμόζουμε τον κανόνα του DeL'Hospital:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-\sigma\upsilon\nu(2x)}{e^{3x}-\sigma\upsilon\nu(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{2x}-\sigma\upsilon\nu(2x)\right)'}{\left(e^{3x}-\sigma\upsilon\nu(3x)\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+2\eta\mu(2x)}{3e^{3x}+3\eta\mu(3x)}=\frac{2e^0+2\eta\mu 0}{3e^0+3\eta\mu 0}=\frac{2}{3}}$$

(ζ) $\lim\limits_{x\to -\infty} xe^x=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x}{e^{-x}}$

Είναι

$$\lim_{x\to-\infty} x=-\infty \ \kappa\alpha\iota\ \lim_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$$

και αρα το $\lim_{x\to-\infty} xe^x$ αποτελεί απροσδιοριστία τύπου $\frac{-\infty}{+\infty}$. Εφαρμόζουμε τον κανόνα του DeL'Hospital:

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x)'}{(e^{-x})'}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-x}}=0}$$

(η) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^{x^2}}$

Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} x^2=(+\infty)^2=+\infty \ \kappa\alpha\iota\ \lim_{x\to+\infty} e^{x^2}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x^2}=+\infty$$

και αρα το $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}$ αποτελεί απροσδιοριστία τύπου $\frac{+\infty}{+\infty}$. Εφαρμόζουμε τον κανόνα του DeL'Hospital:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2)'}{\left(e^{x^2}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2xe^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x^2}}=0}$$

(θ) $\lim\limits_{x\to 0} x^2e^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}$

Είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty \ \kappa\alpha\iota\ \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}}=+\infty$$

και αρα το $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}$ αποτελεί απροσδιοριστία τύπου $\frac{+\infty}{+\infty}$. Εφαρμόζουμε τον κανόνα του DeL'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}}=+\infty$$

(ι) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot \ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{\frac{1}{\ln x}}$ το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή τύπου $\frac{0}{0}$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του L'Hôspital, θα συναντήσουμε παράγωγο της συνάρτησης $x\mapsto\frac{1}{\ln x}$ στον παρονομαστή, η οποία είναι περίπλοκη. Γράφοντας όμως, $\lim_{x\to 0^+} x\cdot \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή τύπου $\frac{+\infty}{+\infty}$. εφαρμόζουμε τον κανόνα του L'Hôspital,

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0}$$

(ια) $\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = -\frac{1}{2}}$

(ιβ) $\boxed{\lim_{x\to 0^+} x\sqrt[x]{e} = \lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = +\infty}$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\sigma\upsilon\nu\,(kx)} = \frac{1}{8}$. Έχουμε για κάθε $k\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to 0}(e^x+e^{-x}-2) = e^0+e^0-2 = 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \lim_{x\to 0}\big(1-\sigma\upsilon\nu(kx)\big) = 0$$

και αρα το $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}$ αποτελεί απροσδιοριστία τύπου $\frac{0}{0}$. Εφαρμόζουμε τον κανόνα του DeL'Hospital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\sigma\upsilon\nu(kx)} &= \lim_{x\to 0}\frac{(e^x+e^{-x}-2)'}{\big(1-\sigma\upsilon\nu(kx)\big)'} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{k\eta\mu(kx)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{k^2\sigma\upsilon\nu(kx)} \\
&= \frac{e^0+e^0}{k^2\sigma\upsilon\nu 0} = \frac{2}{k^2}
\end{aligned}$$

απροσδιοριστία τύπου $\frac{0}{0}$
DeL'Hospital

και αρα

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\sigma\upsilon\nu(kx)} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{2}{k^2} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{k^2} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \boxed{k = \pm 4}$$