

Δραστηριότητες σελ. 83-84 (Ασύμπτωτες Συνάρτησης)

1. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

(β) $f(x) = \ln(x-1)$

(γ) $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \ln x$

(δ) $f(x) = \frac{x-5}{|x-3|}$

2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = \frac{2x^4 - 3x + 1}{x^4 + 1}$

(β) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 1} + 2x$

(γ) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}} + x^2 + 1$

3. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως ΣΩΣΤΟ ή ως ΛΑΘΟΣ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας:

(α) Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
πλάγια ασύμπτωτη όταν $x \rightarrow +\infty$, τότε το όριο
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
θα είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

(β) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δεν μπορεί να ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
τέμνει μία πλάγια ασύμπτωτή της.

(γ) Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , έχει πλάγια ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
ασύμπτωτη, τότε η συνάρτηση f είναι είτε κυρτή είτε
κοίλη στο πεδίο ορισμού της.

(δ) Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
τότε η γραφική της παράσταση, δεν έχει κατακόρυφες
ασύμπτωτες.

(ε) Αν μία συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τότε η ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
γραφική παράσταση της δεν έχει κατακόρυφες
ασύμπτωτες.

(στ) Αν το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f είναι το κλειστό ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
διάστημα $[\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε η γραφική της παράσταση,
δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

4. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις πλάγιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

(β) $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$

(γ) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

(δ) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 2\lambda}{x - \lambda^2}$$

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 4$, να υπολογίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δραστηριότητες σελ. 83-84 (Ασύμπτωτες Συνάρτησης)

1. (α) $f(x) = \frac{x}{x-1}, x \neq 1$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty \text{ και}$$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty$. Συνεπώς, η ευθεία με εξίσωση $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη του γραφήματος της f .

(γ) $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \ln x, x > 0$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} \ln x = -\infty,$$

με μια εφαρμογή του κανόνα του DLH. Συνεπώς, η ευθεία με εξίσωση $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη του γραφήματος της f (από δεξιά).

(β) $f(x) = \ln(x-1), x > 1$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1) = -\infty.$$

Συνεπώς, η ευθεία με εξίσωση $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη του γραφήματος της f (από δεξιά).

(δ) $f(x) = \frac{x-5}{|x-3|} = \begin{cases} \frac{x-5}{x-3}, & x > 3 \\ \frac{x-5}{3-x}, & x < 3 \end{cases}$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-5}{x-3} = -\infty$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-5}{3-x} = -\infty$$

Συνεπώς, η ευθεία με εξίσωση $x = 3$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη του γραφήματος της f .

2.

(α) $f(x) = \frac{2x^4 - 3x + 1}{x^4 + 1}$

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και είναι ρητή με το βαθμό του πολωνύμου του παρονομαστή να ισούται με το βαθμό του πολωνύμου του αριθμητή. Έτσι, η ευθεία $y = \frac{2}{1} = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη του γραφήματος της f όταν $x \rightarrow \pm\infty$ ενώ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

(β) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 1} + 2x$. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 1} + 2x) = +\infty$$

και

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 1} + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 1} + 2x)(\sqrt{4x^2 + 1} - 2x)}{\sqrt{4x^2 + 1} - 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 1})^2 + (2x)^2}{\sqrt{4x^2 + 1} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1} - 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - 2 \right)} = 0 \end{aligned}$$

και άρα ο άξονας των τετμημένων είναι οριζόντια ασύμπτωτη της συνάρτησης όταν $x \rightarrow -\infty$ ενώ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

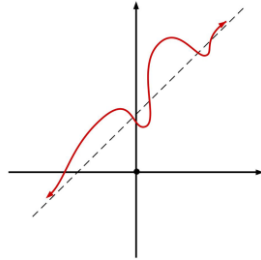
(γ) $f(x) = e^{\frac{1}{x}} + x^2 + 1$. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}_*$ και αφού (κατα τα γνωστά)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{\frac{1}{x}} + x^2 + 1 \right) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^{\frac{1}{x}} + x^2 + 1 \right) = +\infty$$

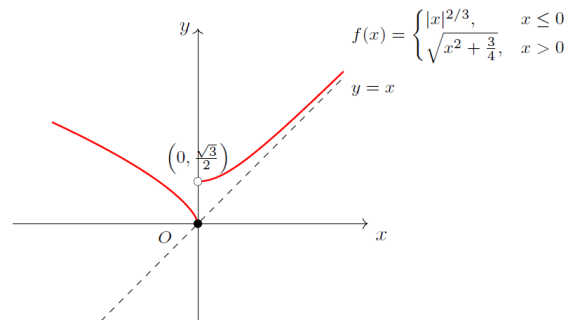
έπεται ότι ο άξονας των τεταγμένων είναι οριζόντια ασύμπτωτη (από αριστερά). Δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες (ελέγξτε τα όρια στο $\pm\infty$).

3. (α) **ΣΩΣΤΟ**: Άμεσο από τον ορισμό της πλάγιας ασύμπτωτης. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση συμπεριφέρεται οριακά ως πολυώνυμο βαθμού 1.

(β) **ΛΑΘΟΣ**: Δες π.χ. σελ.76 του σχολικού βιβλίου. Ιδιαίτερα, μπορεί να την τέμνει σε άπειρα το πλήθος σημεία:



(γ) **ΛΑΘΟΣ**: Π.χ.



(δ) **ΛΑΘΟΣ**: Ένα αντιπαράδειγμα είναι η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$.

(ε) **ΛΑΘΟΣ**: Για παράδειγμα, η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα των τεταγμένων και πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.

(στ) **ΣΩΣΤΟ**: Ναι γιατί η συνάρτηση θα είναι άνω και κάτω φραγμένη.

4. (α) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και είναι ρητή με το βαθμό του πολυωνύμου του παρονομαστή να είναι κατά ένα μικρότερος από το βαθμό του πολυωνύμου του αριθμητή. Έτσι, εκτελώντας τη διαίρεση $\frac{x^3}{x^2+1}$ έχουμε

$$\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$$

και αρα η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης όταν $x \rightarrow \pm\infty$. [Επαληθεύστε το-είναι υποχρεωτικό]

(β) $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(0, +\infty)$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x^2}\right)$$

Αλλά,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

(κατά τα γνωστά με χρήση του κανόνα του DLH) και αρα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x^2}\right) = 1 \quad (1)$$

Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad (2)$$

(κατά τα γνωστά με χρήση του κανόνα του DLH) και αρα από τις (1) και (2), από το γνωστό μας Θεώρημα, έπεται ότι **η ευθεία με εξίσωση $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης όταν $x \rightarrow +\infty$.**

(γ) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ αφού $x^2 + x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1$$

και

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \cdot (\sqrt{x^2 + x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Έτσι, η ευθεία με εξίσωση $y = x + \frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης όταν $x \rightarrow +\infty$. Ομοίως, βρίσκουμε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = -\left(x + \frac{1}{2}\right)$ είναι πλάγια ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης όταν $x \rightarrow -\infty$.

(δ) $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}_*$ και αφού (κατά τα γνωστά)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} = e^0 = 1 \quad (1)$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(e^{-\frac{1}{x}} - 1 \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$$

και (κατά τα γνωστά με χρήση του κανόνα του DLH)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = -1 \quad (2)$$

Έτσι, από τις (1) και (2) έχουμε, από το γνωστό μας Θεώρημα, ότι η ευθεία με εξίσωση $y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης στο $+\infty$. Ομοίως, βρίσκουμε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = x - 1$ είναι επίσης πλάγια ασύμπτωτη του γραφήματος της συνάρτησης στο $-\infty$.

5.

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 2\lambda}{x - \lambda^2}, x \in \mathbb{R} - \{\pm\lambda\}$$

Η **συνάρτηση** αυτή είναι ρητή για κάθε τιμή της παραμέτρου λ . Για να έχει η συνάρτηση κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 4$, θα πρέπει ένα τουλάχιστον από τα πιο κάτω να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = +\infty \text{ ή } \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty \text{ είτε } \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty \text{ ή } \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = -\infty$$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - 5x + 2\lambda}{x - \lambda^2} = +\infty \Leftrightarrow \lambda = -2$$

Ομοίως και οι άλλες περιπτώσεις. Για $\lambda = -2$, είναι

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x - 4}{x^2 - 4}, \quad x \in \mathbb{R} - \{\pm 2\}$$