1η διαγνωστική εξέταση

Ενότητες: Κανόνες του L' Hôpital-Θεώρημα του Rolle-Θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού.

Άσκηση 1
Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\text{συν}(5x)}{2x^2}, \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x^3+2x-3} \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to +\infty} x^3 e^{-x^2}.$$

Άσκηση 2
(α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

(β) Για την πιο κάτω συνάρτηση, βεβαιωθείτε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle στο διάστημα που δίνεται:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-2}, \quad \text{στο} \quad [-1,1].$$

Ακολούθως, να βρεθούν τα σημεία στα οποία η παράγωγος λαμβάνει την τιμή που δίνεται από το εν λόγω Θεώρημα, στο αναφερόμενο διάστημα.

Άσκηση 3
(α) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\sqrt{x+1}, \quad x\geq 0.$$

Βεβαιωθείτε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος της μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού για την f στο διάστημα $[0,8]$ και προσδιορίστε τα σημεία στα οποία η παράγωγος λαμβάνει την τιμή που δίνεται από το εν λόγω Θεώρημα, στο αναφερόμενο διάστημα.
Δώστε **γεωμετρική ερμηνεία του πιο πάνω αποτελέσματος**.

(β) Έστω συνάρτηση f, συνεχής στο διάστημα $[1,2]$, παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ και τέτοια ώστε $f(2)-f(1)=7$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=3\xi^2$.
[Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^3$]

Άσκηση 4
(α) Έστω $a,b\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $3ax^2+2bx=a+b$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0,1)$.
[Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x)=ax^3+bx^2-(a+b)x$]

(β) Δείξτε ότι για κάθε τιμή του λ, η εξίσωση $x^4+32x+\lambda=0$ έχει το πολύ 2 πραγματικές λύσεις.

Άσκηση 5
Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(0,\pi/2]$ ισχύει

$$\text{συν}x<\frac{\text{ημ}x}{x}<1.$$

Μπορεί να ισχύει η πιο πάνω ανίσωση για $x\in(3\pi/2,2\pi)$;

- ΤΕΛΟΣ -

Ενδεικτικές απαντήσεις

Άσκηση 1

$$\lim_{x\to 0}(1-\text{συν}(5x)) = 1-\text{συν}0 = 1-1 = 0, \qquad \lim_{x\to 0}(2x^2) = 2\lim_{x\to 0}(x^2) = 0$$

και αρα το όριο είναι απροσδιόριστη μορφή τύπου 0/0. Υπολογίζουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\text{συν}(5x))'}{(2x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{5\text{ημ}(5x)}{4x} = \frac{5}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\text{ημ}(5x)}{x}.$$

Το τελευταίο όριο είναι πάλι απροσδιόριστη μορφή τύπου 0/0. Υπολογίζουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\text{ημ}(5x))'}{x'} = 5\lim_{x\to 0}\text{συν}x = 5\text{συν}0 = 5.$$

Άρα, από κανόνα του L' Hôpital,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\text{συν}(5x)}{2x^2} = \frac{5}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\text{ημ}(5x)}{x} = \frac{5}{4}\cdot 5 = \frac{25}{4}.$$

Για το δεύτερο όριο, είναι

$$\lim_{x\to 1}\ln(x) = \ln 1 = 0, \qquad \lim_{x\to 1}(x^3+2x-3) = 1^3+2\cdot 1-3 = 0$$

και αρα το όριο είναι απροσδιόριστη μορφή τύπου 0/0. Υπολογίζουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\ln(x))'}{(x^3+2x-3)'} = \lim_{x\to 1}\frac{1/x}{3x^2+2} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x(3x^2+2)} = \frac{1}{1\cdot(3\cdot 1^2+2)} = \frac{1}{5}.$$

Άρα, από κανόνα του L' Hôpital,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x^3+2x-3} = \lim_{x\to 1}\frac{(\ln(x))'}{(x^3+2x-3)'} = \frac{1}{5}.$$

Για το τρίτο όριο,

$$\lim_{x\to+\infty}x^3e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^{x^2}}.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι το όριο είναι απροσδιόριστη μορφή τύπου $(+\infty)/(+\infty)$. Υπολογίζουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3)'}{(e^{x^2})'} = \frac{3}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x^2}}.$$

Το τελευταίο όριο είναι απροσδιόριστη μορφή τύπου 0/0. Υπολογίζουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x'}{(e^{x^2})'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2xe^{x^2}} = 0.$$

Άρα, από κανόνα του L' Hôpital,

$$\lim_{x\to+\infty}x^3e^{-x^2} = 0.$$

Άσκηση 2
(α) Θεώρημα του Rolle
Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα (κλειστό) διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλ. στο (a, β) και τέτοια ώστε $f(a) = f(\beta)$. Τότε, υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

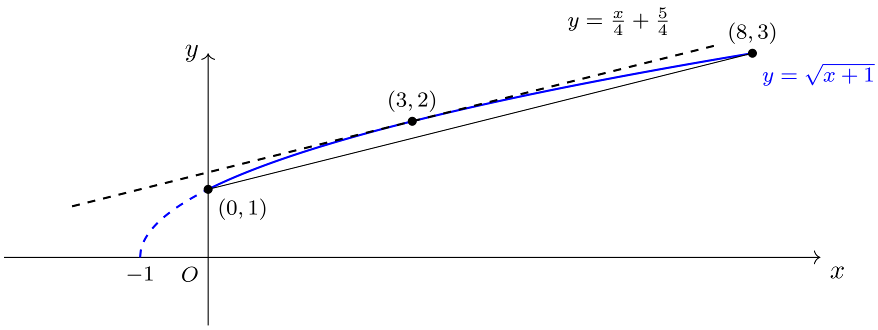
Γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος του Rolle
Το πιο πάνω Θεώρημα (με τις υποθέσεις που το συνοδεύουν), μας λέει ότι η παράγωγος της συνάρτησης στο (a, β) μηδενίζεται μια τουλάχιστον φορά, δηλ. υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\xi \in (a, \beta)$ για το οποίο η εφαπτομένη στο σημείο αυτό είναι παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων.

(β) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}$.
Η f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$, άρα και στο διάστημα $[-1, 1]$. Είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ ως πηλίκο συνεχών και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλαδή στο διάστημα $(-1, 1)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων.
Επίσης,
$$f(1) = \frac{1^2 - 1}{1 - 2} = 0 = \frac{(-1)^2 - 1}{-1 - 2} = f(-1).$$
Συνεπώς, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle για την f στο διάστημα $[-1, 1]$.
Άρα,
$$\exists\ \xi \in (-1, 1)\ :\ f'(\xi) = 0.$$
Θα προσδιορίσουμε όλα εκείνα τα $\xi \in (-1, 1)$ για τα οποία $f'(\xi) = 0$.
Είναι
$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x - 2)^2}$$
και αρα
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}.$$
Αλλά από τις δύο αυτές ρίζες, μόνο η $\xi = 2 - \sqrt{3}$ ανήκει στο διάστημα $(-1, 1)$.

Άσκηση 3
(α) $f(x) = \sqrt{x + 1}, \quad x \geq 0.$

Η f είναι συνεχής στο $[0, 8]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων (ποιών;) και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλαδή στο διάστημα $(0, 8)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων.

Συνεπώς, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος της μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού για την f στο διάστημα $[0, 8]$.
Άρα,
$$\exists\ \xi \in (0, 8)\ :\ f'(\xi) = \frac{f(8) - f(0)}{8 - 0} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{1}}{8} = \frac{3 - 1}{8} = \frac{1}{4}.$$
Θα προσδιορίσουμε τις λύσεις της εξίσωσης $f'(x) = \frac{1}{4}$ στο διάστημα $(0, 8)$. Είναι
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + 1}}, \quad x \geq 1$$
και αρα
$$f'(x) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x + 1}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{x + 1} = 2 \Leftrightarrow x + 1 = 4 \Leftrightarrow x = 3 \in (0, 8).$$
Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι η εφαπτομένη στο σημείο $(3, f(3)) = (3, 2)$ του γραφήματος της f είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(0, f(0)) = (0, 1)$ και $(8, f(8)) = (8, 3)$.



(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^3$. Η g είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$ (ως διαφορά δύο συνεχών συναρτήσεων) και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ (ως διαφορά δύο τέτοιων). Επίσης,

$$g(1) = f(1) - 1, \quad g(2) = f(2) - 8.$$

Άρα

$$g(2) - g(1) = f(2) - f(1) - 7 = 7 - 7 = 0 \Rightarrow g(1) = g(2).$$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle για την g στο διάστημα $[1, 2]$:

$$\exists\ \xi \in (1, 2)\ :\ g'(\xi) = 0.$$

Είναι

$$g'(x) = f'(x) - 3x^2, \quad \forall x \in (1, 2)$$

και άρα

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - 3\xi^2 = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 3\xi^2.$$

Άσκηση 4

(α) Έστω $a, b \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = ax^3 + bx^2 - (a + b)x]$
Είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 1)$ (είναι πολυωνυμική) και $f(0) = 0 = f(1)$.
Συνεπώς από το Θεώρημα του Rolle

$$\exists\ \xi \in (0, 1)\ :\ f'(\xi) = 0.$$

Αλλά,

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx - (a + b)$$

και το ζητούμενο έπεται.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^4 + 32x + \lambda$.
Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f = 0$ έχει 3 διαφορετικές λύσεις, τις ρ_1, ρ_2, ρ_3. Έστω χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Αφού $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$, από το Θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$, υπάρχει $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\rho_1) = 0$.
Ομοίως, αφού $f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$, (ξανά) από το Θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[\rho_2, \rho_3]$, υπάρχει, υπάρχει $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοιο ώστε $f'(\rho_2) = 0$.
Προφανώς, $\xi_1 \neq \xi_2$. Τώρα, αφού

$$f'(x) = 4x^3 + 32 = 4(x^3 + 8) = 4(x + 2)(x^2 - 2x + 4),$$

έπεται ότι f' έχει μοναδική πραγματική ρίζα τον αριθμό $x = -2$.
Καταλήξαμε σε άτοπο.
Άρα, η εξίσωση $x^4 + 32x + \lambda = 0$ έχει το πολύ δύο λύσεις, για κάθε τιμή της σταθεράς λ (δηλαδή μπορεί να μην έχει καμία, μπορεί να έχει μόνο μία ή να έχει ακριβώς δύο).

Άσκηση 5

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \eta\mu x$. Έστω $x \in (0, \pi/2)$ σταθεροποιημένο. Τότε, ορίζεται το διάστημα $[0, x]$. Ικανοποιούνται όλες οι προϋποθέσεις του ΘΜΤΔΛ για την f στο διάστημα αυτό:

$$\exists\ \xi \in (0, x)\ :\ f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\eta\mu x - \eta\mu 0}{x - 0} = \frac{\eta\mu x}{x}.$$

Αλλά $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και αρα

$$f'(\xi) = \frac{\eta\mu x}{x} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\xi = \frac{\eta\mu x}{x}.$$

Όμως,

$$0 < \xi < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\xi > \sigma\upsilon\nu x$$

και αρα από τα πιο πάνω

$$\sigma\upsilon\nu x < \frac{\eta\mu x}{x}.$$

Επιπλέον, $x \in (0, \pi/2) \Rightarrow 0 < \eta\mu x < 1$ και $0 < \frac{1}{x} < \frac{2}{\pi} < 1$, οπόταν

$$\frac{\eta\mu x}{x} < 1.$$

Έτσι,

$$\sigma\upsilon\nu x < \frac{\eta\mu x}{x} < 1.$$

Η ανίσωση ισχύει για $x = \pi/2$, αλλά δεν ισχύει για $x \in (3\pi/2, 2\pi)$, αφού για $x \in (3\pi/2, 2\pi)$ είναι $\eta\mu x/x < 0$ ενώ $\sigma\upsilon\nu x > 0$.

- ΤΕΛΟΣ -