Τεύχος Α - Ένθετο [Θεώρημα Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής]

Εκφωνήσεις των ασκήσεων

Δραστηριότητες (Θεώρημα Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής)

❶ Να διατυπώσετε το θεώρημα της «μέγιστης και ελάχιστης τιμής συνάρτησης»

❷ Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = x^2 - 6x + 10$$

παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή. Στη συνέχεια, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f στο διάστημα $[1,5]$.

❸ Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M, τότε το σύνολο τιμών της $f(A)$ είναι:

(α) $f(A) = f([\alpha,\beta])$ **(β)** $f(A) = f([\beta,\alpha])$ **(γ)** $f(A) = [f(\alpha), f(\beta)]$

(δ) $f(A) = [m, M]$ **(ε)** $f(A) = [f(\beta), f(\alpha)]$

❹ Να βρείτε το σύνολο τιμών των πιο κάτω συναρτήσεων, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

(α) $f_1(x) = \ln x,\ x \in [1,10]$ **(β)** $f_2(x) = 3x + 2,\ x \in [0,3]$ **(γ)** $f_3(x) = x^2 + x + 1,\ x \in [-1,4]$

(δ) $f_4(x) = \sigma\upsilon\nu x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ **(ε)** $f_5(x) = e^x,\ x \in [-1,0]$.

❺ Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [3,7] \to \mathbb{R}$. Αν m είναι η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της συνάρτησης, να αποδείξετε ότι:

$$m \leq \frac{3f(3) + 7f(7)}{10} \leq M$$

❻ Να αιτιολογήσετε, δίνοντας κατάλληλο παράδειγμα, γιατί μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό διάστημα δεν έχει πάντοτε σύνολο τιμών που να είναι ανοικτό διάστημα.

■

Ένθετο (Θεώρημα Μέγιστης/Ελάχιστης τιμής)

❶ **ΘΕΩΡΗΜΑ [Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής]-Διατύπωση στο ένθετο**

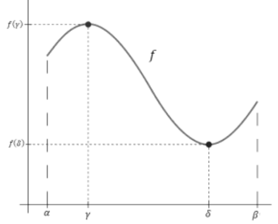
Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε, υπάρχουν **τουλάχιστον** δυο σημεία $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ στα οποία η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή αντίστοιχα. Δηλ. $f(x_1)=$η μέγιστη τιμή της f και $f(x_2)=$η ελάχιστη τιμή της f.

ΘΕΩΡΗΜΑ [Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής]-Διατύπωση δεδομένων των ορισμών ολικού μεγίστου/ελαχίστου

Μια συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ λαμβάνει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο.

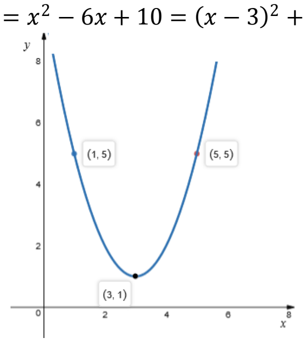
Με άλλα λόγια, το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι επίσης κλειστό διάστημα. Έτσι, υπάρχουν $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ τέτοιοι ώστε $f(x_1)=m$ και $f(x_2)=M$ όπου m και M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f αντίστοιχα. Δηλ. $f([\alpha,\beta])=[m,M]$.

[Μπορεί να είναι $m=M$. Στην περίπτωση αυτή, το Σ.Τ. της συνάρτησης είναι μονοσύνολο και άρα αυτή είναι σταθερή συνάρτηση]



❷ Η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2-6x+10$ λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο διάστημα $[1,5]$. Αυτό είναι άμεση απόρροια του Θεωρήματος Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής, αφού η f είναι συνεχής (ως πολυωνυμική) και άρα συνεχής στο (κλειστό) διάστημα $[1,5]$. Για να βρούμε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της μπορούμε να ακολουθήσουμε είτε αλγεβρικούς χειρισμούς, είτε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι το γράφημα αυτής αποτελεί παραβολή. Με τον πρώτο τρόπο:

$$f(x)=x^2-6x+10=(x-3)^2+1\quad(\mathbf{1})$$



και άρα $x\in[1,5]\Rightarrow(x-3)\in[-2,2]\Rightarrow(x-3)^2\in[0,4]\Rightarrow\underbrace{((x-3)^2+1)}_{f(x)}\in[1,5]$, δηλ. $f_{\mu\acute{\varepsilon}\gamma.}=5$ και $f_{\varepsilon\lambda.}=1$. Με το δεύτερο τρόπο, από την $(\mathbf{1})$ παρατηρούμε ότι η κορυφή της παραβολής είναι στο σημείο $(3,1)$ στην οποία λαμβάνει την ελάχιστή της τιμή (άσχετα αν αυτή περιοριστεί στο διάστημα $[1,5]$), δηλ. $f_{\varepsilon\lambda.}=1$. Τώρα, παρατηρούμε ότι $f(1)=5=f(5)$ και αρα, αφού τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα συμμετρίας της παραβολής, ότι $f_{\mu\acute{\varepsilon}\gamma.}=f(1)=f(5)=5$.

❸ Από τα συμφραζόμενα της άσκησης, το σύνολο A είναι το Π.Ο. της f, δηλ. $D(f)\equiv A$ και το σύνολο $[\alpha,\beta]$ είναι ένα υποσύνολο του A στο οποίο ο περιορισμός της f είναι συνεχής συνάρτηση.

❹ **(α) ΛΑΘΟΣ:** Για παράδειγμα, $f(x)=1,x\in\mathbb{R}$. Τότε $D(f)\equiv A=\mathbb{R}$ και ο περιορισμός της f στο διάστημα $[0,1]$ είναι συνεχής συνάρτηση με $f([0,1])=\{1\}$ αφού $f(x)=1,\forall x\in[0,1]$.

(β) Το ερώτημα δεν έχει νόημα, αφού για να ορίζεται το **διάστημα** $[\alpha,\beta]$ πρέπει $\beta>\alpha$. Αν οι συγγραφείς εννούσαν ότι πρέπει να συμπεράνουμε ότι $\alpha=\beta$ και αρα η f είναι συνεχής σε ενα και μονο σημείο του Π.Ο. της, τότε και πάλιν το αποτέλεσμα δεν ισχύει. Αν όμως οι συγγραφείς εννοούσαν ότι το διάστημα $[\alpha,\beta]$ είναι το π.ο. της f, τότε (εντελώς καταχρηστικά και πάλιν) το συμπέρασμα θα ήταν ότι η f είναι η σταθερή συνάρτηση.

(γ) ΛΑΘΟΣ: Για παράδειγμα, αν $f(x)=\eta\mu x,x\in\mathbb{R}$. Τότε $D(f)\equiv A=\mathbb{R}$. Έτσι, (αν βέβαια θεωρήσουμε το αποτέλεσμα αυτό ως ορθό από την τριγωνομετρία που μάθαμε σε προηγούμενες τάξεις) $f(\mathbb{R})=[-1,1]$. Αν οι συγγραφείς εννούσαν ότι $A=[\alpha,\beta]$, τότε αν $[\alpha,\beta]\equiv\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$, η f είναι συνεχής συνάρτηση με $f\left(\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]\right)=[-1,1]=\left[f\left(\frac{3\pi}{2}\right),f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$ (αν βέβαια θεωρήσουμε το αποτέλεσμα αυτό ως ορθό από την τριγωνομετρία που μάθαμε σε προηγούμενες τάξεις)

(δ) ΣΩΣΤΟ: από το Θεώρημα Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής.

(ε) ΛΑΘΟΣ: Ας θεωρήσουμε ότι $A=[\alpha,\beta]$. Τότε το αποτέλεσμα δεν ισχύει. Αν π.χ. $[\alpha,\beta]\equiv\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και $f(x)=\eta\mu x$, τότε η f είναι συνεχής συνάρτηση με $f(\beta)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ και $f(\alpha)=f(0)=0$ και δεν έχει νόημα να μιλήσουμε για διάστημα $[f(\beta),f(\alpha)]$.

(α) $f_1(x)=\ln x,x\in[1,10]$. Θεωρούμε γνωστό (από τη θεωρία) ότι αν $1\le x\le 10$, τότε $\ln 1\le\ln x\le\ln 10$, δηλ. $0\le\ln x\le\ln 10$ και άρα $R(f_1)=[0,\ln 10]$. Συγκεκριμένα, $f_1(1)=0$ είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης και $f_1(10)=\ln 10$ είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης. Το αποτέλεσμα αυτό έρχεται σε συμφωνία με το Θεώρημα Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής.

(β) $f_2(x) = 3x + 2, x \in [0,3]$. Αν $0 \le x \le 3 \Rightarrow 0 \le 3x \le 9 \Rightarrow 2 \le \underbrace{3x+2}_{f_2(x)} \le 11$ και αρα $R(f) = [2,11]$. Συγκεκριμένα, $f_1(0) = 2$ είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης και $f_1(3) = 11$ είναι η μέγιστη τιμή της. Το αποτέλεσμα αυτό έρχεται σε συμφωνία με το Θεώρημα Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής.

(γ) $f_3(x) = x^2 + x + 1, x \in [-1,4]$. Γράφουμε $f_3(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}, x \in [-1,4]$. Το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ εκφράζει παραβολή με ελάχιστη τιμή την $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$. Τότε,

αν $-1 \le x \le -\frac{1}{2} \Rightarrow \underbrace{f\left(-\frac{1}{2}\right)}_{\frac{3}{4}} \le f(x) \le \underbrace{f(-1)}_{1}$ ενω αν $-\frac{1}{2} \le x \le 4 \Rightarrow \underbrace{f\left(-\frac{1}{2}\right)}_{\frac{3}{4}} \le f(x) \le \underbrace{f(4)}_{21}$. Η ένωση των διαστημάτων $\left[\frac{3}{4},1\right]$ και $\left[\frac{3}{4},21\right]$, δηλ. το $\left[\frac{3}{4},21\right]$ είναι το σύνολο τιμών της f_3. Συγκεκριμένα, $f_3\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης και $f_3(4) = 21$ είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης. Το αποτέλεσμα αυτό έρχεται σε συμφωνία με το Θεώρημα Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής. **Παρατηρήστε** ότι $f_3(-1) = 1 = f_3(0)$.

(δ) $f_4(x) = συνx, x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Ξέρουμε από τη θεωρία ότι αν $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, τότε $συν\frac{\pi}{2} \le συνx \le συν0$, δηλ. $0 \le συνx \le 1$ και αρα $R(f_4) = [0,1]$. Συγκεκριμένα, $f_4(0) = 1$ είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης και $f_4\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης. Το αποτέλεσμα αυτό έρχεται σε συμφωνία με το Θεώρημα Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής.

(ε) $f_5(x) = e^x, x \in [-1,0]$. Ξέρουμε από τη θεωρία ότι αν $-1 \le x \le 1$, τότε $e^{-1} \le e^x \le e^0$, δηλ.

$$\frac{1}{e} \le e^x \le 1$$

και αρα $R(f_5) = \left[\frac{1}{e},1\right]$. Συγκεκριμένα, $f_5(0) = 1$ είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης και $f_5(-1) = \frac{1}{e}$ είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης. Το αποτέλεσμα αυτό έρχεται σε συμφωνία με το Θεώρημα Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής.

❺ $f\colon [-3,7] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αφού m είναι η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της f αντίστοιχα, τότε $m \le f(x) \le M, \forall x \in [-3,7]$. Έτσι,

$$\begin{cases} 3 \in [-3,7] \Rightarrow m \le f(3) \le M \Rightarrow 3m \le 3f(3) \le 3M \\ 7 \in [-3,7] \Rightarrow m \le f(7) \le M \Rightarrow 7m \le 7f(7) \le 7M \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{3m + 7m}_{10m} \le 3f(3) + 7f(7) \le \underbrace{3M + 7M}_{10M}$$

$$\Rightarrow \frac{10m}{10} \le \frac{3f(3) + 7f(7)}{10} \le \frac{10M}{10}$$

$$\Rightarrow m \le \frac{3f(3) + 7f(7)}{10} \le M$$

❻ **Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ενα ανοικτό διάστημα δεν έχει πάντοτε σύνολο τιμών που να είναι ανοικτό διάστημα.**

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x) = ημx, \qquad x \in \left(0,\frac{10\pi}{6}\right).$$

Τότε.

$$f\left(\left(0,\frac{10\pi}{6}\right)\right) = [-1,1] = \left[f\left(\frac{3\pi}{2}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$