Άσκηση 1.1. Να υπολογισθούν τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

(i) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{-x^2} dx\right) dy$ **(ii)** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} \left(\int_y^{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{x^2}{2}\right) dx\right) dy$ **(iii)** $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-y^2)^{\frac{3}{2}} dy\right) dx.$

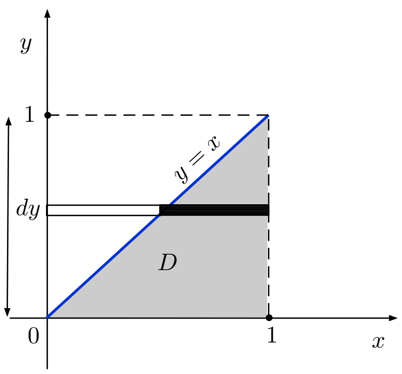
Λύση

1. Δεν μπορώ να ολοκληρώσω πρώτα ως προς x γιατί δε γνωρίζω το $\int e^{-x^2}\,dx$. Γι'αυτό, μετατρέπω το χωρίο ολοκλήρωσης από $y-$απλό σε $x-$απλό:

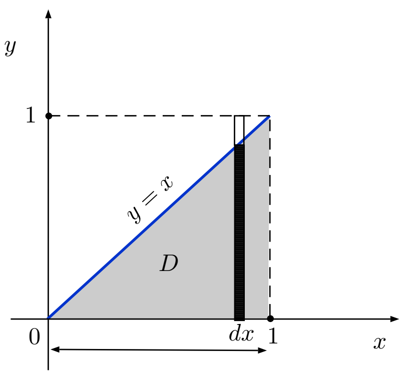
$$\begin{aligned} D &= \{(x,y)\ :\ 0 \le y \le 1,\ y \le x \le 1\} \quad y - \text{απλό} \\ &= \{(x,y)\ :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\} \quad x - \text{απλό} \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_y^1 e^{-x^2} dx\right) dy &= \int_0^1 \left(\int_0^x e^{-x^2} dy\right) dx = \int_0^1 \left[ye^{-x^2} dy\right]_{y=0}^{x} dx \\ &= \int_0^1 xe^{-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_{y=0}^{1} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right) \end{aligned}$$



$D = \{(x,y)\ :\ 0 \le y \le 1,\ y \le x \le 1\}$



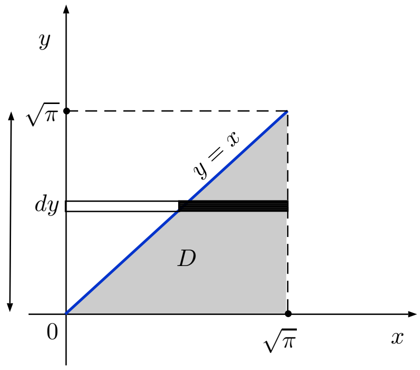
$D = \{(x,y)\ :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$

2. Δεν μπορώ να ολοκληρώσω πρώτα ως προς x γιατί δε γνωρίζω το $\int \cos\left(\frac{x^2}{2}\right) dx$. Γι'αυτό, μετατρέπω το χωρίο ολοκλήρωσης από $y-$απλό σε $x-$απλό:

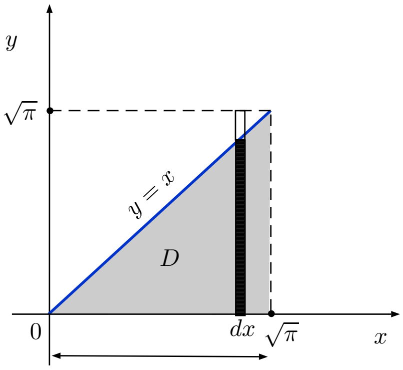
$$\begin{aligned} D &= \{(x,y)\ :\ 0 \le y \le \sqrt{\pi},\ y \le x \le \sqrt{\pi}\} \quad y - \text{απλό} \\ &= \{(x,y)\ :\ 0 \le x \le \sqrt{\pi},\ 0 \le y \le x\} \quad x - \text{απλό}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{\pi}} \left(\int_y^{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{x^2}{2}\right) dx\right) dy &= \int_0^{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^x \cos\left(\frac{x^2}{2}\right) dy\right) dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} \left[y\cos\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_{y=0}^{x} dx \\ &= \int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos\left(\frac{x^2}{2}\right) dx = \left[\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^{\sqrt{\pi}} \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0 = 1. \end{aligned}$$



$D=\{(x,y)\ :\ 0\le y\le\sqrt{\pi},\ y\le x\le\sqrt{\pi}\}$



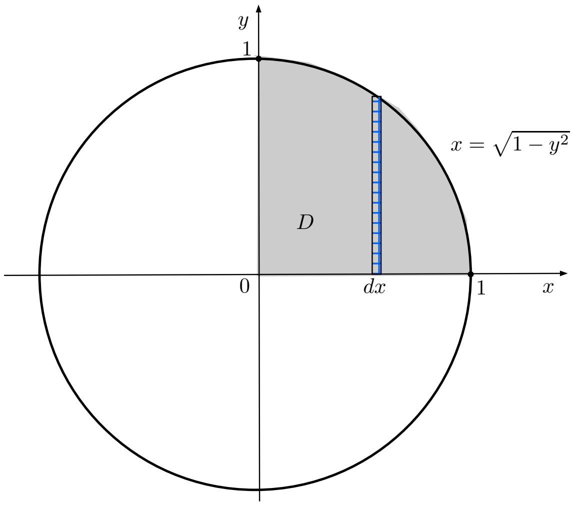
$D=\{(x,y)\ :\ 0\le x\le\sqrt{\pi},\ 0\le y\le x\}$

3. Δεν μπορώ να ολοκληρώσω πρώτα ως προς x γιατί δε γνωρίζω το $\int(1-y^2)^{\frac{3}{2}}dy$. Γι'αυτό, μετατρέπω το χωρίο ολοκλήρωσης από $x-$απλό σε $y-$απλό:

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y)\ :\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\} \quad x-\text{απλό}\\ &= \{(x,y)\ :\ 0\le y\le 1,\ 0\le x\le\sqrt{1-y^2}\} \quad y-\text{απλό}\end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}dy\right)dx &= \int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}dx\right)dy\\ &= \int_0^1\left[(1-y^2)^{\frac{3}{2}}x\right]_0^{\sqrt{1-y^2}}dy\\ &= \int_0^1(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-y^2}dy\\ &= \int_0^1(1-y^2)^2dy=\frac{8}{15}\end{aligned}$$



$D = \{(x,y)\ :\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le \sqrt{1-y^2}\}$

Άσκηση 1.2. Να υπολογισθεί το πιο κάτω ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy \right) dx.$$

Λύση Αν επιχειρήσουμε να υπολογίσουμε το (διαδοχικό) ολοκλήρωμα με τη σειρά ολοκλήρωσης πρώτα ως προς y και μετά ως προς x, δηλ. όπως μας το έχουν δώσει, θα πρέπει να υπολογίσουμε ενα ολοκλήρωμα της μορφής $\int \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\, dx$. Το ολοκλήρωμα αυτό υπολογίζεται (π.χ.) με την αντικατάσταση $x = a\varepsilon\varphi.u$ (δοκιμάστε το). Αν όμως αντιστρέψουμε τη σειρά ολοκλήρωσης, το ολοκλήρωμα που θα προκύψει θα είναι ευκολότερο: είναι

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y)\ :\ 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1\} \quad x-\text{απλό} \\ &= \{(x,y)\ :\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y\} \quad y-\text{απλό} \end{aligned}$$

και αρα

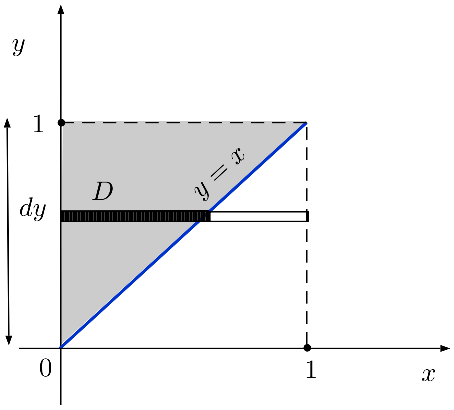
$$\begin{aligned} I = \int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy \right) dx &= \iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^y \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx \right) dy \end{aligned}$$

και αφού

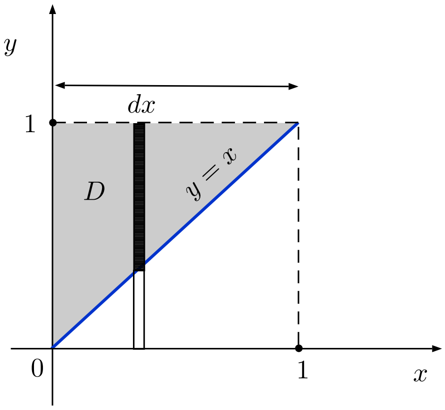
$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+y^2)'\, dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2},$$

έπεται ότι

$$I = \int_{y=0}^1 \left[\sqrt{x^2+y^2} \right]_0^y = \int_0^1 (\sqrt{2}-1) y\, dy = (\sqrt{2}-1) \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$$



$D = \{(x, y) \; : \; 0 \leq y \leq 1, \; 0 \leq x \leq y\}$



$D = \{(x, y) \; : \; 0 \leq x \leq 1, \; x \leq y \leq 1\}$

Άσκηση 1.3. Να υπολογισθεί το πιο κάτω ολοκλήρωμα:

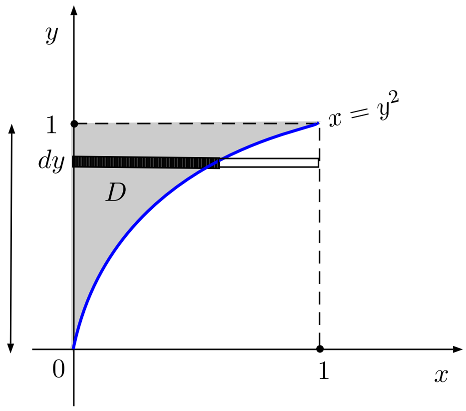
$$I = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1 + y^3} \, dy \right) dx.$$

Λύση Δεν μπορώ να υπολογίσω το $\int \sqrt{1 + y^3} \, dy$. Έτσι, μετατρέπω το χωρίο ολοκλήρωσης από x−απλό σε y−απλό:

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \; : \; 0 \leq x \leq 1, \; \sqrt{x} \leq y \leq 1\} \quad x - \text{απλό} \\ &= \{(x, y) \; : \; 0 \leq y \leq 1, \; 0 \leq x \leq y^2\} \quad y - \text{απλό} \end{aligned}$$

και αρα

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1 + y^3} \, dy \right) dx &= \iint_D \sqrt{1 + y^3} \, dy dx = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} \sqrt{1 + y^3} \, dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left[x \cdot \sqrt{1 + y^3} \right]_0^{y^2} dy = \int_0^1 y^2 \cdot \sqrt{1 + y^3} \, dy \\ &= \frac{2}{9} \left[(y^3 + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{9} \cdot (2^{\frac{3}{2}} - 1) \end{aligned}$$



$D = \{(x, y) \; : \; 0 \leq y \leq 1, \; 0 \leq x \leq y^2\}$

Άσκηση 1.4 Να υπολογιστεί το πιο κάτω ολοκλήρωμα:

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\, dxdy$$

όπου D το χωρίο που φράσσεται από τις ευθείες με εξίσωση $x = 0, \quad x+y = 1, \quad y = 0$ και $x+y = 3$.

Λύση Εύκολα βρίσκουμε τα σημεία τομής των ευθειών με εξίσωση $x+y = 1, \quad x+y = 3$ και των αξόνων των συντεταγμένων (είναι τα $(0,1)$, $(1,0)$, $(3,0)$ και $(0,3)$). Τα σημεία αυτά καθορίζουν το D το οποίο έχει τη μορφή τραπεζίου (δες σχήμα). Θεωρούμε το μετασχηματισμό

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{με} \quad (x,y) \mapsto T(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) := (y-x, x+y).$$

Είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφο τον

$$T^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{με} \quad (u,v) \mapsto T^{-1}(u,v) = \left(\frac{1}{2}(v-u), \frac{1}{2}(u+v)\right).$$

Αφού ο T είναι δι-γραμμικός, η εικόνα του χωρίου D μέσω του αντίστροφού του (διατηρείται η μορφή του συνόρου του D) μπορεί να βρεθεί βρίσκοντας τις εικόνες (μέσω του T) των κορυφών του τραπεζοειδούς χωρίου D :

$$T((0,1)) = (1,1), \quad T((1,0)) = (-1,1), \quad T((3,0)) = (-3,3), \quad T((0,3)) = (3,3).$$

Άρα

$$T(D) = \{(u,v) \,:\, 1 \leq v \leq 3, \quad |u| \leq v\}$$

Είναι

$$\det(J_{(u,v)}) = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

και αρα

$$\det(J_{(x,y)}) = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{\det(J_{(u,v)})} = -\frac{1}{2}.$$

Από το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητής στο διπλό ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\begin{aligned} \iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\, dxdy &= \iint_{T(D)} e^{\frac{u}{v}} \cdot |J_{(x,y)}|\, dudv = \frac{1}{2}\int_{v=1}^{3}\int_{u=0}^{|v|} e^{\frac{u}{v}}\, dudv \\ &= \frac{1}{2}\int_1^3 \left[v \cdot e^{\frac{u}{v}}\right]_{u=0}^{|v|} dv = \frac{7}{4e}\cdot(e^2-1) \end{aligned}$$