

Λύσεις των ασκήσεων στα

Βασικά Μαθηματικά II

Κεφάλαιο 2

1. (i) $r = 3 \cos \theta$.
Έχουμε

$$\begin{aligned} r = 3 \cos \theta &\stackrel{r}{\Rightarrow} r^2 = 3r \cos \theta \stackrel{\substack{r \sin \theta = y \\ r^2 = x^2 + y^2}}{\Rightarrow} x^2 + y^2 = 3y \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 - 3y = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

δηλ. κύκλος με κέντρο το σημείο $K(0, \frac{3}{2})$ και ακτίνα $R = 3/2$.

- (ii) $r = \tan \theta \sec \theta$.
Έχουμε

$$r = \tan \theta \sec \theta \Leftrightarrow r = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{\cos \theta} \Leftrightarrow r \cos^2 \theta = \sin \theta.$$

Αλλά, $\sin \theta = \frac{y}{r}$ και $\cos \theta = \frac{x}{r}$ και αντικατάσταση στην πιο πάνω δίνει

$$\boxed{y = x^2}$$

δηλ. παραβολή με κορυφή στην αρχή των αξόνων.

- (iii) $r = \frac{1}{2 \cos \theta + 3 \sin \theta}$.
Έχουμε

$$\begin{aligned} r = \frac{1}{2 \cos \theta + 3 \sin \theta} &\Leftrightarrow 2 \underbrace{(r \cos \theta)}_{=x} + 3 \underbrace{(r \sin \theta)}_{=y} = 1 \\ &\Leftrightarrow \boxed{2x + 3y = 1} \end{aligned}$$

δηλ. ευθεία με σημεία τομής με τους άξονες συντεταγμένων τα σημεία $(\frac{1}{2}, 0)$ και $(0, \frac{1}{3})$.

2. (i) $x^2 + y^2 + 6y = 0$.
Έχουμε

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 6y = 0 &\stackrel{\substack{x=r \cos \theta \\ y=r \sin \theta}}{\Leftrightarrow} r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta + 6r \sin \theta = 0 \\ &\Leftrightarrow r^2 \underbrace{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}_{=1} + 6r \sin \theta = 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{r^2 = -6r \sin \theta} \end{aligned}$$

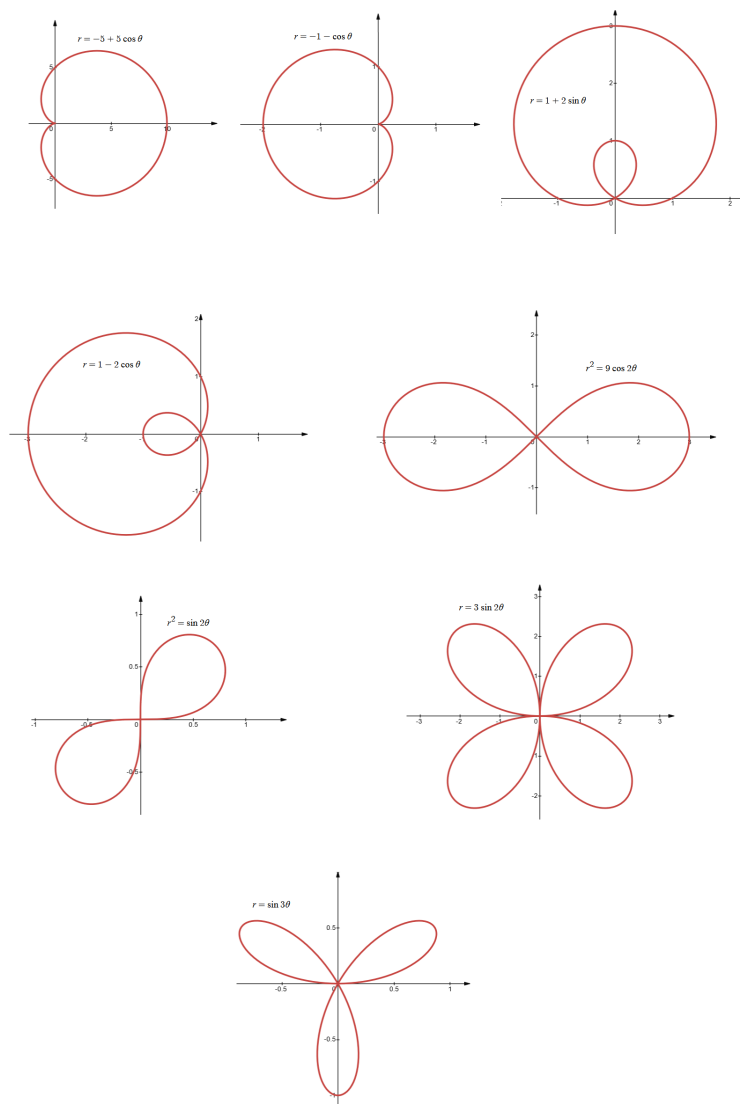
- (ii) $9xy = 4$.
Έχουμε

$$9xy = 4 \stackrel{\substack{x=r \cos \theta \\ y=r \sin \theta}}{\Leftrightarrow} 9r^2 \cos \theta \sin \theta = 4 \stackrel{\sin(2\theta)=2 \cos \theta \sin \theta}{\Leftrightarrow} \boxed{r^2 \sin(2\theta) = \frac{4}{9}}$$

- (iii) $x^2(x^2 + y^2) = y^2$.

Αντικαθιστούμε $r^2 = x^2 + y^2$, $x = r \cos \theta$ και $y = r \sin \theta$ και παίρνουμε

$$\boxed{r^2 = \tan^2 \theta}.$$



Σχήμα 1: Άσκηση 3

3.

4. (i) $r = 4 \cos 3\theta$.
Είναι

$$\cos 3\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, \quad \theta = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Λόγω συμμετρίας,

$$E = 3 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} r^2(\theta) d\theta.$$

Έχουμε

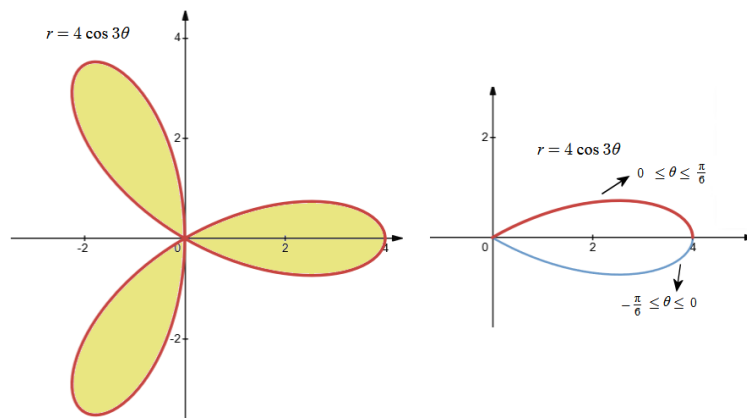
$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} r^2(\theta) d\theta &= 16 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2(3\theta) d\theta = \frac{16}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) du \\ &= \frac{16}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos(2u)}{2} \right) du = \frac{8}{3} \left[\frac{1}{2} \cdot \sin(2u) + u \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{8\pi}{3}\end{aligned}$$

και αρα

$$E = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8\pi}{3} = 4\pi.$$

Σημείωση: Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε:

$$E = 6 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} r^2(\theta) d\theta = 3 \int_0^{\frac{\pi}{6}} r^2(\theta) d\theta.$$



Σχήμα 2: Άσκηση 4 (i)

(ii) $r = 2a \cos 2\theta$, $r = a\sqrt{2}$.

Βρίσκουμε τα σημεία τομής των δυο καμπύλων:

$$2a \cos 2\theta = a\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos 2\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos 2\theta = \cos(\pi/4)$$

$$\Leftrightarrow \theta = k\pi + \frac{\pi}{8}, \quad \theta = k\pi - \frac{\pi}{8}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Άρα, λόγω συμμετρίας,

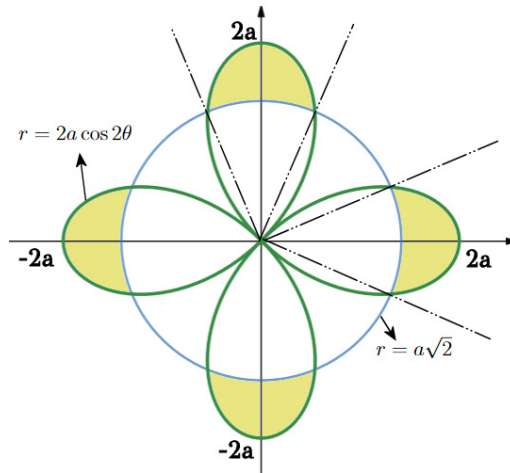
$$E = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} [(2a \cos 2\theta)^2 - (a\sqrt{2})^2] d\theta = 4a^2 \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} (2 \cos^2 2\theta - 1) d\theta.$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} (2 \cos^2 2\theta - 1) d\theta = \frac{1}{2}$$

και αρα

$$E = 2a^2.$$



Σχήμα 3: Άσκηση 4 (ii)

(iii) $r = 1 + \cos \theta$, $r = 3 \cos \theta$.

Βρίσκουμε τα σημεία τομής των δυο καμπύλων:

$$1 + \cos \theta = 3 \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2\theta = \cos(\pi/3)$$

$$\Leftrightarrow \theta = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, \quad \theta = 2k\pi + \frac{5\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Άρα, τα σημεία τομής είναι για $\theta = \pm \frac{\pi}{3}$. Το ζητούμενο εμβαδόν προκύπτει αν από το εμβαδόν του κύκλου αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τμήματος μεταξύ του καρδιοειδούς και του κύκλου για $\theta \in [-\pi/3, \pi/3]$. Το εμβαδόν του κύκλου είναι

$$E_1 = 2\pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9\pi}{4}$$

και το άλλο εμβαδόν (λόγω συμμετρίας):

$$\begin{aligned} E_2 &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} [(3 \cos \theta)^2 - (1 + \cos \theta)^2] d\theta \\ &= \int_0^{\pi/3} (3 + 4 \cos 2\theta - 2 \cos \theta) d\theta \\ &= [3\theta + 2 \sin 2\theta - 2 \sin \theta]_0^{\pi/3} \\ &= \pi \end{aligned}$$

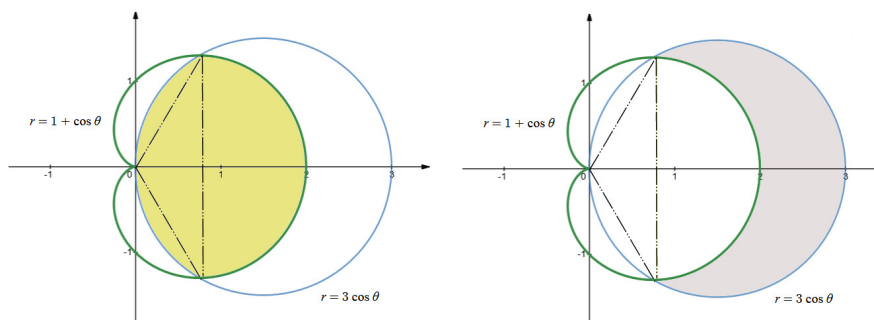
και άρα

$$E = E_1 - E_2 = \frac{9\pi}{4} - \pi = \frac{5\pi}{4}.$$

(iv) $r \cos \theta = 6$, $r = 10$.

Έχουμε:

$$\begin{cases} r \cos \theta = 6 \\ r = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \theta = \cos^{-1} \left(\frac{3}{5} \right).$$



Σχήμα 4: Άσκηση 4 (iii)

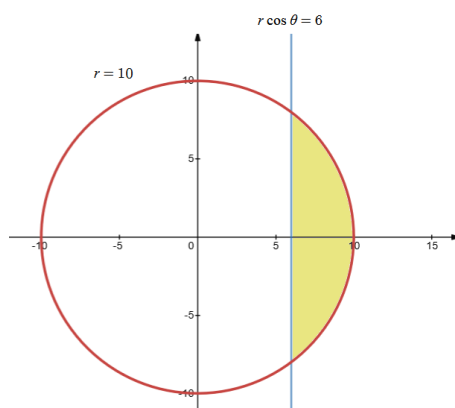
Το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με

$$\begin{aligned}
 E &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\cos^{-1}(\frac{3}{5})} \left[10^2 - \left(\frac{6}{\cos \theta} \right)^2 \right] d\theta = \int_0^{\cos^{-1}(\frac{3}{5})} [100 - 36 \sec^2 \theta] d\theta \\
 &= [100\theta - 36 \tan \theta]_0^{\cos^{-1}(\frac{3}{5})} = 100 \cos^{-1} \left(\frac{3}{5} \right) - 36 \cdot \frac{4}{5} \\
 &\Rightarrow \boxed{E = 100 \cos^{-1} \left(\frac{3}{5} \right) - 48}.
 \end{aligned}$$

Σημείωση:

$$\tan \left(\cos^{-1} \left(\frac{3}{5} \right) \right) = \frac{4}{5}.$$

(κάντε το αντίστοιχο ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές 3,4 και 5)



Σχήμα 5: Άσκηση 4 (iv)

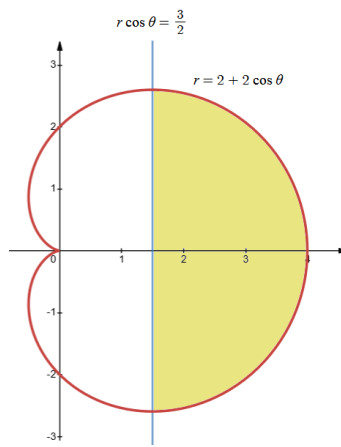
(v) $r = 2 + 2 \cos \theta$, $r \cos \theta = \frac{3}{2}$. Έχουμε

$$2 + 2 \cos \theta = \frac{3}{2 \cos \theta} \Leftrightarrow 4 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta - 3 = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = \pm \frac{1}{2}.$$

Λύνουμε τις πιο πάνω εξισώσεις κατά τα γνωστά και βρίσκουμε ότι τα σημεία τομής είναι αυτά με $\theta = \pm \frac{\pi}{3}$.

Λόγω συμμετρίας, το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$\begin{aligned}
 E &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \left[(2 + 2 \cos \theta)^2 - \left(\frac{3}{2 \cos \theta} \right)^2 \right] d\theta \\
 &= 4 \int_0^{\pi/3} (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta - \frac{9}{4} \int_0^{\pi/3} \sec^2 \theta d\theta \\
 &= \left[\sin 2\theta + 8 \sin \theta + 6\theta - \frac{9}{4} \tan \theta \right]_0^{\pi/3} \\
 &= 2\pi + \frac{9\sqrt{3}}{4}
 \end{aligned}$$



Σχήμα 6: Άσκηση 4 (v)

5. Η κλίση της εφαπτομένης σε σημείο $\theta = \theta_0$ της καμπύλης με πολική εξίσωση $r = r(\theta)$ δίνεται από τον τύπο

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\theta_0} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r(\theta_0) \cos \theta_0 + r'(\theta_0) \sin \theta_0}{-r(\theta_0) \sin \theta_0 + r'(\theta_0) \cos \theta_0}.$$

- (i) $r = 1 + \sin \theta \Rightarrow r'(\theta) = \cos \theta \Rightarrow r'(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ και αρα η ζητούμενη κλίση είναι

$$\lambda = \frac{(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}}{-(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}} = -1 - \sqrt{2}.$$

- (ii) $r = a \sec 2\theta \Rightarrow r'(\theta) = 2a \sec 2\theta \tan 2\theta \Rightarrow r'(\pi/6) = 2a \sec(\pi/3) \tan(\pi/3) = 4a\sqrt{3}$ και $r(\pi/6) = a \sec(\pi/3) = 2a$. Συνεπώς, η ζητούμενη κλίση είναι

$$\lambda = \frac{2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}}{-2a \cdot \frac{1}{2} + 4a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{5}.$$

- (iii) $r = 3 - 4 \sin \theta \Rightarrow r'(\theta) = -4 \cos \theta \Rightarrow r'(\pi) = -4 \cos(\pi) = 4$ και $r(\pi) = 3$. Συνεπώς, η ζητούμενη κλίση είναι

$$\lambda = \frac{3 \cdot (-1) + 4 \cdot 0}{-3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1)} = \frac{3}{4}.$$

6. (i) Η καμπύλη $r = 2a \cos \theta$, ($a > 0$) είναι κύκλος με κέντρο το σημείο $K(a, 0)$ και ακτίνα $R = a$. Άρα,

$$L = 2\pi a.$$

Διαφορετικά,

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\theta) + \left(\frac{dr(\theta)}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta} d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} a d\theta = 2\pi a
 \end{aligned}$$

(ii) $r = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^\pi \sqrt{r^2(\theta) + \left(\frac{dr(\theta)}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^\pi \sqrt{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta \\
 &\stackrel{(*)}{=} \int_0^\pi \sqrt{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin^2(\theta)} d\theta \stackrel{(**)}{=} \int_0^\pi \sqrt{\frac{1}{4}(1 - \cos \theta)^2 + \frac{1}{4} \sin^2(\theta)} d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \sqrt{1 - 2 \cos \theta + 2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sqrt{2(1 - \cos \theta)} d\theta \\
 &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \int_0^\pi \sqrt{4 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta = \int_0^\pi \left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| d\theta \\
 &\stackrel{(***)}{=} \int_0^\pi \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = -2 \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]_0^\pi = 2
 \end{aligned}$$

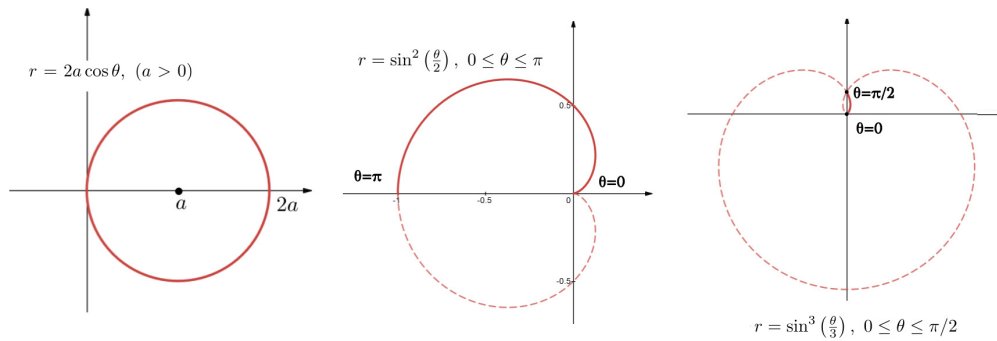
(*) : $2 \sin \theta \cos \theta = \sin(2\theta)$

(**) : $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$

(***) : $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \geq 0, \forall \theta \in [0, \pi]$

(iii) $r = \sin^3\left(\frac{\theta}{3}\right)$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2(\theta) + \left(\frac{dr(\theta)}{d\theta}\right)^2} d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^6\left(\frac{\theta}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right) \sin^4\left(\frac{\theta}{3}\right)} d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^4\left(\frac{\theta}{3}\right) \left[\sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right) \right]} d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} \sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right) \sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right)} d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} \sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\theta}{3}\right) \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{3}{2} \sin\left(\frac{2\theta}{3}\right) \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \frac{1}{8} (2\pi - 3\sqrt{3})
 \end{aligned}$$



Σχήμα 7: Άσκηση 6

7. $r = a(1 + \cos \theta)$.

(i) Είναι

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{d\theta} &= r(\theta) \cos \theta + r'(\theta) \sin \theta \\
 &= a(1 + \cos \theta) \cos \theta - a \sin^2 \theta \\
 &= a \cos^2 \theta + a \cos \theta - a(1 - \cos^2 \theta) \\
 &= a(2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1) \\
 &= 2a(\cos \theta + 1)(\cos \theta - 1/2)
 \end{aligned}$$

Άρα,

$$\frac{dy}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow (\cos \theta + 1 = 0) \vee (\cos \theta - 1/2 = 0).$$

Λύνουμε (κατά τα γνωστά) τις εξισώσεις $\cos \theta = -1$ και $\cos \theta = 1/2$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και παίρνουμε

$$x = \frac{\pi}{3}, \quad \pi, \quad \frac{5\pi}{3}.$$

(ii) Είναι

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{d\theta} &= -r(\theta) \sin \theta + r'(\theta) \cos \theta \\
 &= -a(1 + \cos \theta) \sin \theta - a \sin \theta \cos \theta \\
 &= -a \sin \theta (2 \cos \theta + 1)
 \end{aligned}$$

Άρα,

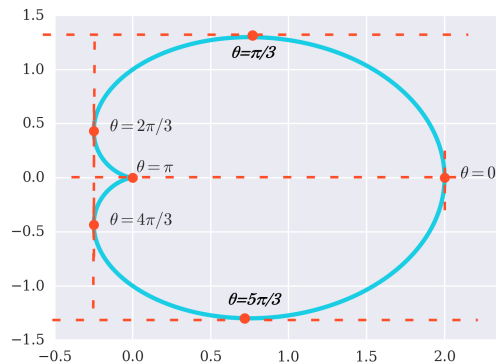
$$\frac{dx}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow (\sin \theta = 0) \vee (2 \cos \theta + 1 = 0).$$

Λύνουμε (κατά τα γνωστά) τις εξισώσεις $\sin \theta = 0$ και $\cos \theta = -1/2$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και παίρνουμε

$$x = 0, 2\pi, \quad \frac{2\pi}{3}, \quad \frac{4\pi}{3}.$$

8. $r = 1 - 2 \sin \theta$. Είναι

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{d\theta} &= r(\theta) \cos \theta + r'(\theta) \sin \theta \\
 &= (1 - 2 \sin \theta) \cos \theta - 2 \sin \theta \cos \theta \\
 &= \cos \theta (1 - 4 \sin \theta)
 \end{aligned}$$



Σχήμα 8: Άσκηση 7

Άρα,

$$\frac{dy}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow (\cos \theta = 0) \vee (1 - 4 \sin \theta = 0).$$

Λύνουμε (κατά τα γνωστά) τις εξισώσεις $\cos \theta = 0$ και $\sin \theta = 1/4$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και παίρνουμε

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \arcsin(1/4), \quad \pi - \arcsin(1/4).$$

9. $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους $x = r \cos \theta$ και $y = r \sin \theta$ και με χρήση της τριγωνομετρικής ταυτότητας $\sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta$, η πιο πάνω γράφεται

$$r^2 = \sin^2 2\theta.$$

Για να τη σχεδιάσουμε, παρατηρούμε ότι λόγω της παρουσίας του τετραγώνου σε αμφότερα μέλη, το γράφημά της είναι συμμετρικό περι της ευθείας $\theta = \pi/2$ (δηλ. του άξονα των y), περί του άξονα των x και γύρω από τον πόλο¹

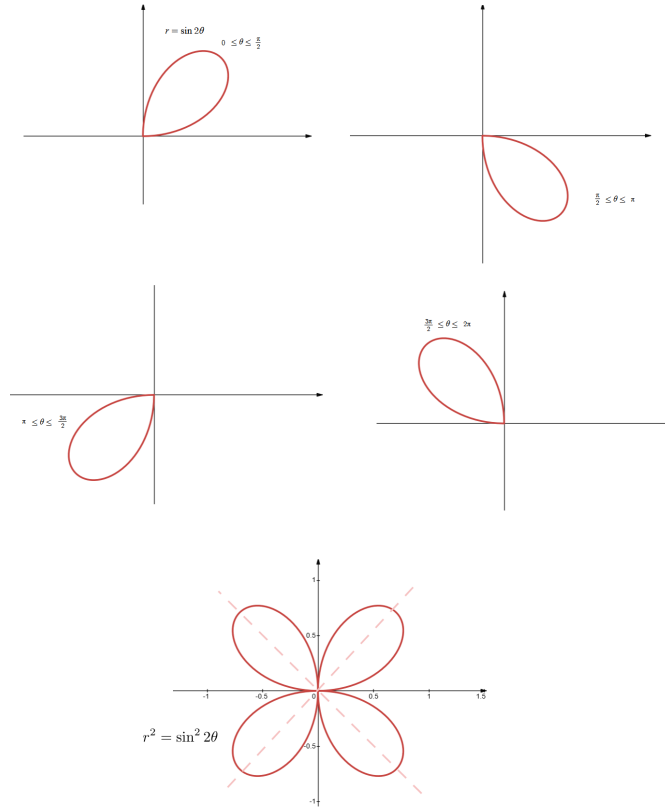
Συνεπώς, σχεδιάζουμε το τμήμα της καμπύλης για $\theta \in [0, \pi/2]$ μέσω της εξίσωσης $r = \sin 2\theta$ και εκμεταλλευόμαστε τη συμμετρία.

10. Παραλείπεται.

11. $r^2 = \cos 2\theta$ γύρω από την ευθεία $\theta = \pi/2$ (η οποία είναι ο άξονας των y). Παρατηρούμε ότι η καμπύλη $r^2 = \cos 2\theta$ είναι συμμετρική γύρω από τον άξονα των x (τον πολικό άξονα) αφού $r^2(-\theta) = \cos(-2\theta) = \cos 2\theta = r^2(\theta)$ όπως επίσης και γύρω από τον άξονα των y , αφού $\cos(2\pi - 2\theta) = \cos 2\theta$ (η περίοδος είναι 4π). Συνεπώς, αρκεί να θεωρήσουμε τον περιορισμό της καμπύλης στο πρώτο τεταρτημόριο, δηλ την $r^2 = \cos 2\theta$, $\theta \in [0, \pi/4]$, δηλ. την $r = \sqrt{\cos 2\theta}$, $\theta \in [0, \pi/4]$. Είναι

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r} \sin(2\theta).$$

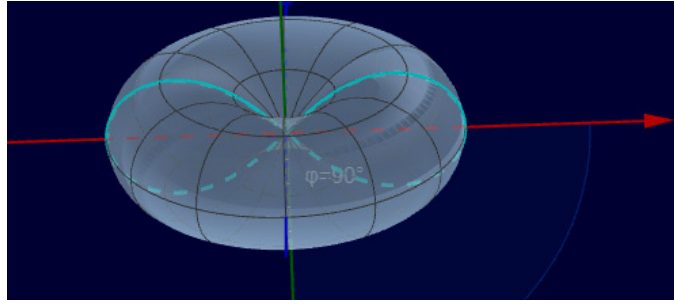
¹αναλλοίωτο στη δράση των μετασχηματισμών $\theta \mapsto -\theta$, $r \mapsto -r$ και $\theta \mapsto \pi - \theta$.



Σχήμα 9: Άσκηση 9

Τότε

$$\begin{aligned}
 S &= \int 2\pi x \, ds = 2\pi \int_0^{\pi/4} x \sqrt{r^2(\theta) + \left(\frac{dr(\theta)}{d\theta}\right)^2} \, d\theta \\
 &= 2 \int_0^{\pi/4} 2\pi r(\theta) \cos \theta \sqrt{r^2(\theta) + \left(\frac{dr(\theta)}{d\theta}\right)^2} \, d\theta \\
 &= 4\pi \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos 2\theta} \cos \theta \sqrt{\cos 2\theta + \frac{1}{r^2} \sin^2 2\theta} \, d\theta \\
 &= 4\pi \int_0^{\pi/4} \cos \theta \sqrt{\cos 2\theta \left(\cos 2\theta + \frac{1}{\cos 2\theta} \sin^2 2\theta \right)} \, d\theta \\
 &= 4\pi \int_0^{\pi/4} \cos \theta \sqrt{\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta} \, d\theta \\
 &= 4\pi \int_0^{\pi/4} \cos \theta \, d\theta = 4\pi [\sin \theta]_0^{\pi/4} \\
 &= 4\pi \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \right]_0^{\pi/4} = 2\sqrt{2}\pi
 \end{aligned}$$



Σχήμα 10: Άσκηση 11

Πίνακας 1: Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

Τριγωνομετρικές εξισώσεις:

$$\sin \theta = \sin \phi \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = 2k\pi + \phi \\ \theta = 2k\pi + \pi - \phi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \theta = \cos \phi \Leftrightarrow \theta = 2k\pi \pm \phi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan \theta = \tan \phi \Leftrightarrow \theta = 2k\pi + \phi, \quad k \in \mathbb{Z}$$