Το εφαπτόμενο επίπεδο

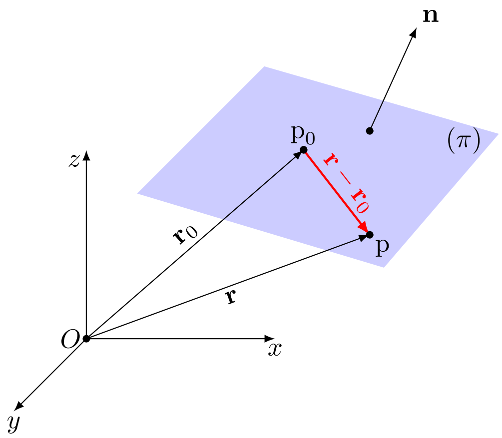
Υπενθυμίσεις

Αν ξέρουμε ενα σημείο $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ενός επιπέδου (π) και ενα διάνυσμα $\mathbf{n} = (a, b, c)$ κάθετο στο επίπεδο αυτο, τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε την εξίσωσή του: αν $\mathbf{p} = (x, y, z) \in (\pi)$ τυχαίο και $\mathbf{r}, \mathbf{r}_0$ τα διανύσματα θέσης των $\mathbf{p}$ και $\mathbf{p}_0$ αντίστοιχα, τότε

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \Rightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0 = 0,$$

δηλ.

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0} \qquad (8)$$



Ας δούμε ενα **παράδειγμα**:
Θα βρούμε την εξίσωση του επιπέδου (π) που περνά από τα σημεία $P = (1, 2, 1)$, $Q = (1, -2, 3)$ και $R = (3, 1, -5)$.

Βρίσκουμε τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης:

$$\mathbf{PQ} = (0, -4, 2), \qquad \mathbf{PR} = (2, -1, -6)$$

Ακολούθως, βρίσκουμε ενα διάνυσμα $\mathbf{n}$ κάθετο στο (π) :

$$\mathbf{PQ} \times \mathbf{PR} = \mathbf{n} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -6 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix} = 26\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}.$$

Συνεπώς, από την (8), έχουμε ότι η εξίσωση του (π) είναι η

$$26(x - 1) + 4(y - 2) + 8(z - 1) = 0,$$

δηλ. η

$$\boxed{13x + 2y + 4z = 21}$$

Έστω τώρα S το γράφημα μιας διαφορίσιμης συνάρτησης $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, δηλ.

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = F(x, y)\}$$

και έστω σημείο $\mathbf{p}_0 \in S$. Τέμνουμε την επιφάνεια S με το κατακόρυφο επίπεδο $\{x = x_0\}$. Η καμπύλη που προκύπτει έχει εφαπτομένη L_{y_0} με εξίσωση $z = F(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}$. Ένα διάνυσμα παράλληλο με την L_{x_0} είναι το

$$\mathbf{u}_y = \left(0, 1, \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}\right).$$

Εντελώς όμοια, το διάνυσμα

$$\mathbf{u}_x = \left(1, 0, \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}\right)$$

είναι παράλληλο με την εφαπτομένη L_{x_0} της καμπύλης που προκύπτει από την τομή της S με το (κατακόρυφο) επίπεδο $\{y = y_0\}$. Τότε, το διάνυσμα

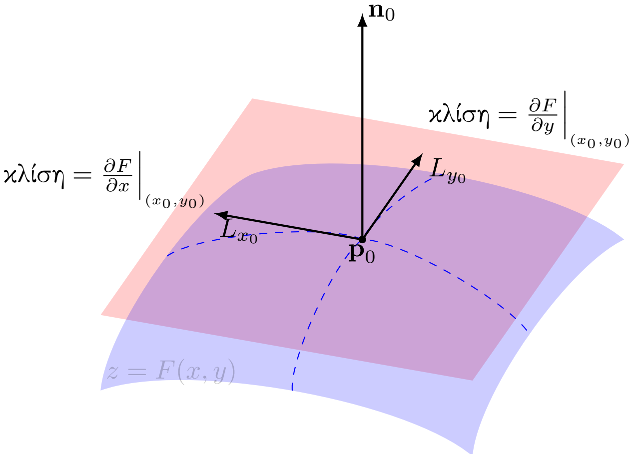
$$\mathbf{n} = \mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} \\ 0 & 1 & \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix} = -\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}\mathbf{i} - \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Συνεπώς, η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου είναι η

$$z - \underbrace{F(x_0, y_0)}_{=z_0} = (x - x_0) \cdot \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} + (y - y_0) \cdot \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)},$$

δηλ.

$$\boxed{z = (x - x_0) \cdot \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} + (y - y_0) \cdot \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} + F(x_0, y_0)} \tag{9}$$



Το επφαπτόμενο επίπεδο αποτελεί μια **γραμμική προσέγγιση** της συνάρτησης $z = F(x, y)$ σε μια περιοχή του σημείου $\mathbf{p}_0$:

$$F(x, y) \approx (x - x_0) \cdot \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} + (y - y_0) \cdot \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} + F(x_0, y_0).$$

Παρατήρηση 0.5.2

Έστω $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη και $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0)$ ενα σημείο στη σταθμική επιφάνεια $S_c = \{F(x, y, z) = c\}$ όπου c σταθερά. Τότε, το διάνυσμα $\nabla F(\mathbf{p}) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{\mathbf{p}}, \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{\mathbf{p}}, \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{\mathbf{p}} \right)$ είναι κάθετο στην S_c υπο την εξής έννοια: αν $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $\exists \epsilon > 0$ και παραμετρημένη καμπύλη $c : (-\epsilon, \epsilon) \to S_c$ με $c(0) = \mathbf{p}$ και $\frac{dc(t)}{dt}\Big|_{t=0} = c'(0) = \mathbf{u}$, τότε

$$\nabla F(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{u} = 0,$$

δηλ. το $\nabla F(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της S_c στο σημείο $\mathbf{p}$ και η εξίσωση του επιπέδου αυτού είναι η

$$\boxed{\nabla F(\mathbf{p}) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0}$$

Παράδειγμα

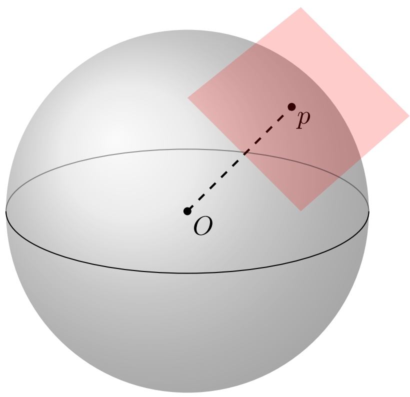
Έστω η μοναδιαία σφαίρα $S^2 = \{x^2+y^2+z^2=1\}$ και έστω $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0) \in S^2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Για κάθε $(x, y, z) \in S^2$ έχουμε $\nabla F(x, y, z) = 2(x, y, z) \Rightarrow \nabla F(\mathbf{p}) = 2(x_0, y_0, z_0)$ και αρα η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της S^2 στο $\mathbf{p}$ είναι η

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0,$$

δηλ. (αφού $\mathbf{p} \in S^2$)

$$x_0x + y_0y + z_0z = 1.$$

Με άλλα λόγια, το εφαπτόμενο επίπεδο είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του διανύσματος $2p$.



Ασκήσεις (Το εφαπτόμενο επίπεδο)

1. Έστω η επιφάνεια S η οποία καθορίζεται από την εξίσωση $xyz = 1$ και έστω $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

   (i) Να βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της S στο (x_0, y_0, z_0).

   (ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες των τομών του επιπέδου που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα με τους άξονες των συντεταγμένων.

   (iii) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που φράσσεται από τις τομές που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα και το σημείο $(0, 0, 0)$.

Απάντηση

(i) $S : xyz = 1 \iff xyz - 1 = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο $F(x, y, z) = xyz - 1$. Είναι $(x, y, z) \in S \iff F(x, y, z) = 0$. Τώρα,

$$\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = (yz, xz, xy)$$

και

$$\begin{aligned} \nabla F(x_0, y_0, z_0) &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}, \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}, \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}\right) \\ &= (y_0z_0, x_0z_0, x_0y_0). \end{aligned}$$

Είναι $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \perp (S)$ και αρα η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της S στο (x_0, y_0, z_0) είναι η

$$y_0 z_0 (x - x_0) + x_0 z_0 (y - y_0) + x_0 y_0 (z - z_0) = 0,$$

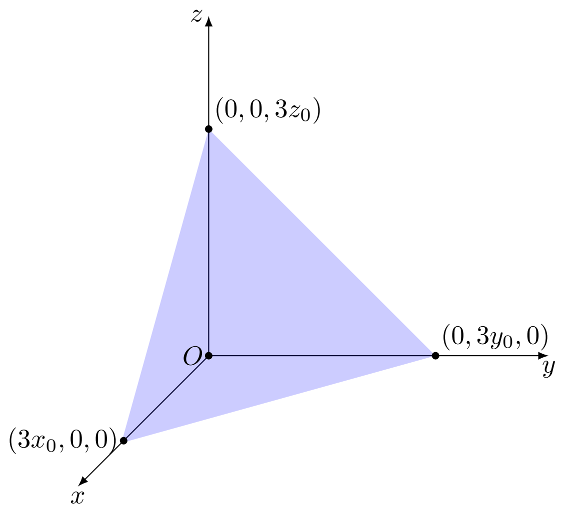
δηλ. η

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 3.$$

(ii) Για $y = z = 0 \Rightarrow x = 3x_0$, για $x = z = 0 \Rightarrow y = 3y_0$ και για $y = x = 0 \Rightarrow z = 3z_0$. Άρα, οι ζητούμενες τομές είναι τα σημεία $(3x_0, 0, 0)$, $(0, 3y_0, 0)$ και $(0, 0, 3z_0)$. Έτσι, το εφαπτόμενο επίπεδο που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα, τέμνει τους άξονες των συντεταγμένων σε ακριβώς 3 σημεία. Άρα, το χωρίου που φράσσεται από τα σημεία αυτά και το $(0, 0, 0)$ είναι μια πυραμίδα.

(iii) Από το γνωστό μας τύπο του όγκου της πυραμίδας,

$$\text{Vol} = \frac{1}{3}\text{E}_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma} \times \text{ύψος} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3z_0 \cdot 3x_0}{2} \cdot 3y_0 = \frac{9}{2} x_0 y_0 z_0.$$



2 Έστω η επιφάνεια S η οποία καθορίζεται από την εξίσωση $1 - z = x^2 + y^2$, $x, y > 0$ και έστω $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

(i) Να βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της S στο (x_0, y_0, z_0).

(ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες των τομών του επιπέδου που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα με τους άξονες των συντεταγμένων.

(iii) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που φράσσεται από τις τομές που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα και το σημείο $(0, 0, 0)$.

Απάντηση

(i) $S : 1 - z = x^2 + y^2, x, y > 0 \iff x^2 + y^2 + z - 1 = 0, x, y > 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x, y > 0\} \to \mathbb{R}$ με τύπο $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 1$. Είναι $(x, y, z) \in S \iff F(x, y, z) = 0$. Τώρα,

$$\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = (2x, 2z, 1)$$

και

$$\begin{aligned} \nabla F(x_0, y_0, z_0) &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}, \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}, \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)} \right) \\ &= (2x_0, 2y_0, 1). \end{aligned}$$

Είναι $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \perp (S)$ και αρα η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της S στο (x_0, y_0, z_0) είναι η

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 1 \cdot (z - z_0) = 0,$$

και αφού $1 - z_0 = x_0^2 + y_0^2$, η τελευταία γράφεται:

$$2x_0 x + 2y_0 y + z + z_0 - 2 = 0$$

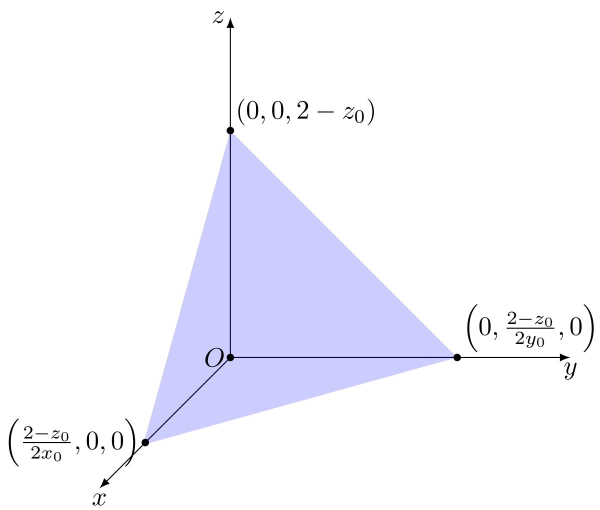
(ii) Για $y = z = 0, x > 0 \Rightarrow x = \frac{2-z_0}{2x_0}$, για $x = z = 0, y > 0 \Rightarrow y = \frac{2-z_0}{2y_0}$ και για $y = x = 0, z > 0 \Rightarrow z = 2 - z_0$. Άρα, οι ζητούμενες τομές είναι τα σημεία

$$\left(\frac{2-z_0}{2x_0}, 0, 0\right), \left(0, \frac{2-z_0}{2y_0}, 0\right), \quad (0, 0, 2 - z_0).$$

Έτσι, το εφαπτόμενο επίπεδο που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα, τέμνει τους άξονες των συντεταγμένων σε ακριβώς 3 σημεία. Άρα, το χωρίου που φράσσεται από τα σημεία αυτά και το $(0, 0, 0)$ είναι μια πυραμίδα.

(iii) Από το γνωστό μας τύπο του όγκου της πυραμίδας,

$$\text{Vol} = \frac{1}{3}\text{E}_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma} \times \text{ύψος} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2-z_0}{2x_0} \cdot \frac{2-z_0}{2y_0} \cdot (2 - z_0).$$



(3) Έστω ο κώνος

$$S : z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad z \geq 0$$

και έστω $(x_0, y_0, z_0) \in S$. Να προσδιορίσετε τα $a, b > 0$ έτσι ώστε η κάθετη ευθεία στο (x_0, y_0, z_0) να τέμνει τον $z-$άξονα.

Απάντηση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(x, y, z) = z^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Είναι

$$\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = \left(-\frac{2x}{a^2}, -\frac{2y}{b^2}, 2z\right)$$

και αρα
$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = \left(-\frac{2x_0}{a^2}, -\frac{2y_0}{b^2}, 2z_0\right).$$
Είναι $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \perp (S)$. Μια παραμέτρηση της κάθετης ευθείας (ϵ) στο (x_0, y_0, z_0) είναι η
$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (x_0, y_0, z_0) + t\left(-\frac{2x_0}{a^2}, -\frac{2y_0}{b^2}, 2z_0\right), \ t \in \mathbb{R}.$$
Για να τέμνει η ευθεία αυτή τον $z-$άξονα, πρέπει $x(t) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{2x_0}{a^2}t$ και $y(t) = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{2y_0}{b^2}t \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow |a| = |b|$.

4 Έστω η σφαίρα $S^2(0, \sqrt{14}) = \{x^2 + y^2 + z^2 = 14\}$.

(i) Να βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της S στο $P(1, 2, 3)$.

(ii) Να βρείτε την απόσταση του σημείου $Q(3, 2, 1)$ από το πιο πάνω εφαπτόμενο επίπεδο.

Απάντηση

(i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14$. Είναι
$$\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = 2(x, y, z)$$
και αρα $\nabla F(P) = (2, 4, 6)$. Η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της $S^2(0, \sqrt{14})$ στο $P(1, 2, 3)$ είναι η $\nabla F(P) \cdot (x - 1, y - 2, z - 3)$, δηλ. $2(x - 1) + 4(y - 2) + 6(z - 3) = 0$, δηλ.
$$(\Pi): \quad x + 2y + 3z = 14.$$

(ii)
$$d(Q, (\Pi)) = \frac{|x_Q + 2y_Q + 3z_Q - 14|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{|3 + 4 + 1 - 14|}{\sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{7}$$