Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές. Στην περίπτωση που συγκλίνουν, να βρεθεί το όριό τους.

(i) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\kappa(\kappa+2)}$ **(ii)** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4\kappa^2-1}$ **(iii)** $\sum_{\kappa=2}^{\nu}\frac{\kappa^2}{\kappa^2-1}$

(iv) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^{\kappa+1}}{8^{\kappa}}$ **(v)** $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{20}{\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa}$

<u>Απάντηση</u>

(i)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\kappa(\kappa+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

Είναι

$$S_\nu=\sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{1}{\kappa(\kappa+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\nu}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\nu-3}-\frac{1}{\nu-1}\right)+\left(\frac{1}{\nu-2}-\frac{1}{\nu}\right)+\left(\frac{1}{\nu-1}-\frac{1}{\nu+1}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+2}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\nu+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{\nu+2}\right)$$

$$\Rightarrow\boxed{\lim_{\nu\to+\infty}S_\nu=\frac{1}{2}\lim_{\nu\to+\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{\nu+1}\right)=\frac{3}{4}}$$

(ii) Όπως και πρίν, βρίσκουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4\kappa^2-1}=\frac{1}{2}$$

Άρα

$$\boxed{\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{4\kappa^2-1}=\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{4\kappa^2-1}-\frac{1}{4\cdot1^2-1}-\frac{1}{4\cdot2^2-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{15}=\frac{1}{5}}$$

(iii) Έχουμε για $\nu\in\mathbb{N}$ σταθεροποιημένο

$$S_\nu=\sum_{\kappa=2}^{\nu}\frac{\kappa^2}{\kappa^2-1}=\sum_{\kappa=2}^{\nu}\left(1+\frac{1}{\kappa^2-1}\right)=\sum_{\kappa=2}^{\nu}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\kappa-1}-\frac{1}{\kappa+1}\right)\right)$$
$$=\sum_{\kappa=2}^{\nu}1+\frac{1}{2}\sum_{\kappa=2}^{\nu}\left(\frac{1}{\kappa-1}-\frac{1}{\kappa+1}\right)$$

Αλλά,

$$\sum_{\kappa=2}^{\nu} 1 = \nu - 1$$

και

$$\sum_{\kappa=2}^{\nu}\left(\frac{1}{\kappa-1}-\frac{1}{\kappa+1}\right)$$
$$= \left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\nu-3}-\frac{1}{\nu-1}\right)+\left(\frac{1}{\nu-2}-\frac{1}{\nu}\right)+\left(\frac{1}{\nu-1}-\frac{1}{\nu}\right)$$
$$= 1-\frac{2}{\nu}$$

Τελικά,

$$S_\nu = \sum_{\kappa=2}^{\nu}\frac{\kappa^2}{\kappa^2-1} = \nu - \frac{1}{2} - \frac{1}{\nu}$$

Συνεπώς, η σειρά **δε συγκλίνει.**

(iv) Έχουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^{\kappa+1}}{8^\kappa} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^\kappa \cdot 3}{8^\kappa} = 3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^\kappa}{8^\kappa} = 3\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^\kappa$$

Η $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^\kappa$ είναι γεωμετρική σειρά (αφού $\left|\frac{3}{8}\right| < 1$) η οποία συγκλίνει στον αριθμό

$$\frac{1}{1-\frac{3}{8}} = \frac{8}{5}$$

και αρα

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^{\kappa+1}}{8^\kappa} = \frac{21}{5}}$$

(v) Έχουμε

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{20}{\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{20}{\frac{\nu(\nu+1)}{2}} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{40}{\nu(\nu+1)} = 40\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right)$$

και αφού (εύκολο)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right) = \lim_{\nu\to+\infty} S_\nu = \lim_{\nu\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\nu+1}\right) = 1$$

έπεται ότι

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{20}{\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa} = 40}$$

Θεωρώντας δεδομένο ότι $\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{\kappa^2} = \frac{\pi^2}{6}$, να υπολογίσετε τη σειρά

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{(2\kappa-1)^2}$$

<u>Απάντηση</u>

$$
\begin{aligned}
S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{1}{(2\kappa-1)^2} &= \sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(\frac{1}{(2\kappa-1)^2}+\frac{1}{(2\kappa)^2}\right) &&= \sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(\frac{1}{(2\kappa-1)^2}+\frac{1}{4\kappa^2}\right)\\
&= \sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{1}{(2\kappa-1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{1}{\kappa^2} &&= \sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{1}{(2\kappa-1)^2}+\frac{1}{4}S_\nu\\
\Rightarrow \frac{3}{4}S_\nu &= \sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{1}{(2\kappa-1)^2} &&\Rightarrow \frac{3}{4}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{\kappa^2} = \sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{(2\kappa-1)^2}\\
\Rightarrow \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6} &= \sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{(2\kappa-1)^2} &&\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{(2\kappa-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}}}
\end{aligned}
$$